FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVIII

Palchetto

Num.° d' ordine 16

NAZIONALE

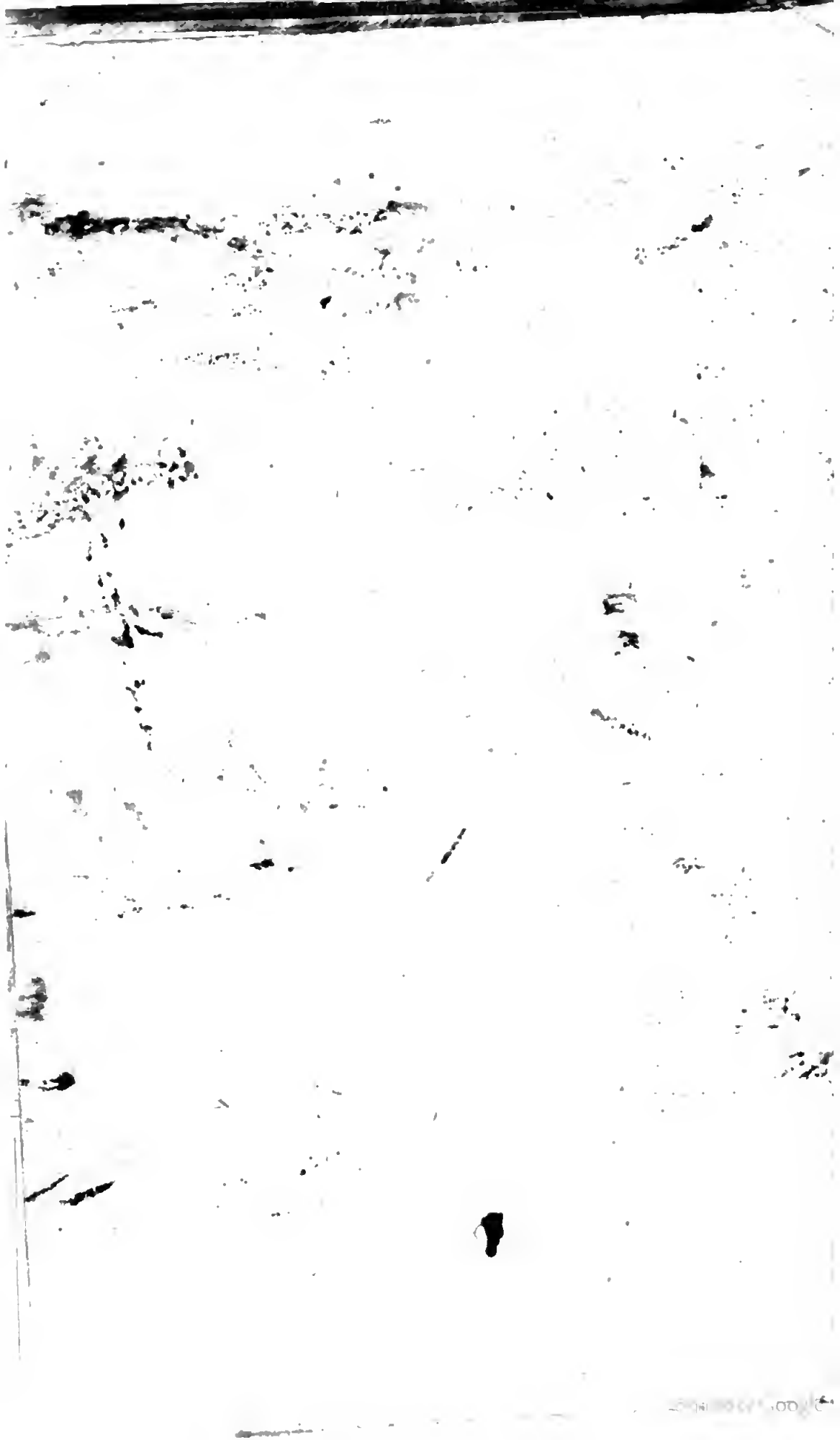
B. Prov.

11

VITT. EM. III

1443

NAPOLI



B. Orig.
II
1113

COURS

ÉLÉMENTAIRE

DE MATHÉMATIQUES,

Par T. SIMPSON.

TOME SECOND,

CONTENANT un Abrégé d'Arithmétique, une Introduction à l'Analyse, & un Recueil choisi de Problêmes numériques & géométriques, avec leur solution.

C10676

ÉLÉMENS D'ANALYSE PRATIQUE;

OU

APPLICATION des principes de l'Algébre & de la Géométrie, à la ſolution d'un très-grand nombre de Problêmes numériques & géométriques.

Traduits de l'Anglois de THOMAS SIMPSON; *de la Société de Londres, & Profeſſeur Royal de Mathématiques à Wolwich.*

Augmentés d'un Abrégé élémentaire d'Arithmétique, & d'une Introduction à l'Analyſe.

BIBLIOTHÈQUE PROVINCIALE DE NAPOLÉON

A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

AVERTISSEMENT.

L'ÉTUDE des Mathématiques eſt ſi univerſellement répandue, qu'on ſe croit diſpenſé de faire l'éloge des Sciences qui en ſont l'objet. Tous ceux qui les profeſſent, ſont d'accord, que pour en rendre l'étude facile & agréable, il faut les traiter par la voie des problêmes. L'Ouvrage que nous préſentons au Public, remplit cet objet; le célébre Simpſon, qui a enſeigné avec tant de ſuccès les Mathématiques dans l'Ecole Royale de Wolwich, en eſt l'Auteur; ſon nom ſeul ſuffit pour en faire connoître l'importance. Cet habile Profeſſeur, convaincu par une longue expérience, que la réſolution des Problêmes étoit le moyen le plus propre à faire ſentir la néceſſité de l'Algébre, avoit raſſemblé, pour l'uſage de ces Eléves, ce Recueil de Problêmes, qui ne demande d'autres connoiſſances que celles de l'Arithmétique ordinaire, celles des Elémens d'Algébre pouſſé juſqu'aux Equations du ſecond degré, & celles des Elémens de Géométrie. C'eſt pour rendre cet Ouvrage, pour ainſi dire, indépendant de tous autres

du même genre, qu'on a mis à la tête un Abrégé d'Arithmétique, & une Introduction à l'Algébre & à l'Analyſe. On ne comptoit d'abord donner que cette Introduction ; mais des perſonnes qui s'intéreſſent au progrès des Sciences, ont repréſenté qu'un Traité concis du calcul numérique, rendroit l'Ouvrage plus complet ; & qu'en joignant à ce volume celui du même Auteur ſur la Géométrie & la Trigonométrie rectiligne & ſphérique, on auroit un Cours élémentaire à l'uſage des jeunes gens qui ſe deſtinent à l'étude des Mathématiques.

L'Arithmétique, quoique très-courte, renferme cependant tout ce qui eſt de plus néceſſaire pour arriver à l'Algébre : après les notions générales ſur les nombres, on trouve la théorie & la pratique des quatre opérations, tant ſur les nombres entiers, incomplexes & complexes, que ſur les fractions : il contient encore les régles d'Alliage, celles de fauſſes Poſitions, tant ſimples que compoſées. On auroit dû faire précéder ces dernieres opérations de la Théorie des proportions & de ſon application aux régles de Trois directe & inverſe, & parler de la régle de Compagnie ; mais on trouvera l'un & l'autre dans l'Introduction à l'Analyſe, qui étoit imprimé avant qu'il fut queſtion de donner cet Abrégé d'Arithmétique.

L'Introduction à l'Analyſe contient deux Parties : la premiere renferme, indépendamment des principes généraux, la maniere d'ajouter, de ſouſtraire, de multiplier & diviſer les monomes & les polynomes: on y trouve auſſi la Théorie des Fractions algébriques, celles des Fractions décimales, les Proportions & leur application aux Régles de Trois & aux Régles de Compagnie, l'Elévation aux puiſſances ſecondes & troiſiémes, l'Extraction des racines de l'un & l'autre degré, & enfin les radicaux ordinaires, & les racines imaginaires.

La ſeconde Partie renferme la Théorie des Equations ſimples, & celle des Equations compoſées: on fait voir d'abord par la réſolution de quelques Problêmes, les moyens que les Algébriſtes ont dû ſuivre pour mettre les données d'un Problême en Equation; c'eſt en quoi conſiſte le grand art de cette branche de l'Analyſe. De la ſolution de ces Problêmes on paſſe à une ſuite de réflexions, qu'on peut regarder comme autant de principes ſur la nature & la formation des Equations en général: on fait l'application de ces principes à des Problêmes plus compliqués que les précédens; par exemple, à des Problêmes ſur la Régle d'Alliage, & à d'autres qui renferment pluſieurs inconnues. J'ai donné trois

ſolutions d'un de ces derniers, qui eſt à quatre inconnues : on apprendra par-là de quelle maniere on peut traiter les Problêmes de cette nature.

On parle enſuite de la transformation des Equations, de la maniere de trouver les racines commenſurables de celles qui ſont compoſées : on termine enfin le tout par des applications des principes à la réſolution générale des équations du ſecond & du troiſiéme degré.

Les Elémens de l'Analyſe pratique ſont auſſi diviſés en deux Parties ; la premiere contient un nombre aſſez conſidérable de Problêmes numériques choiſis, réſolus par l'Algébre. Ces Problêmes vont par gradation, enſorte que ceux qui en tenteront la réſolution, doivent néceſſairement commencer par les premiers, qui préſentent très-peu de difficultés ; par ce moyen, ceux qui ſuivent, deviendront plus faciles.

La ſeconde Partie eſt compoſée d'un nombre d'autres Problêmes géométriques, qu'on peut regarder comme autant d'applications utiles & curieuſes de l'Algébre à la Géométrie. Ceux qui voudront arriver plus aiſément à leur réſolution, doivent étudier avec beaucoup d'attention les Elémens de Géométrie du même Auteur.

ABRÉGÉ

ABRÉGÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ARITHMÉTIQUE.

BIBLIOTECA PROVINCIALE
DI
NAPOLI

L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience des nombres. On donne le nom de nombre à une collection d'unités : on appelle unité ce qui conſtitue un tout.

On diſtingue en Arithmétique deux ſortes de nombres, le nombre entier & le nombre fractionnaire ou rompu.

Le nombre entier contient un aſſemblage de quantités réunies qui forment un tout. Il eſt, ainſi que le nombre fractionnaire, *abſtrait* ou *concret*. Le nombre abſtrait eſt un aſſemblage de pluſieurs unités abſtraites & indéterminées : tel eſt, par exemple, le nombre 4, qui ne déſigne que

quatre unités vagues & ſans détermination. Le nombre concret contient, ainſi que le nombre abſtrait, une collection d'unités, mais ces unités ſont déterminées, comme quand on dit 6 hommes, 6 écus.

Le nombre fractionnaire ou rompu eſt une expreſſion qui déſigne des parties d'une unité quelconque : cette expreſſion eſt compoſée de deux termes; le ſupérieur, qu'on nomme *numérateur*, indique combien on prend de parties de l'unité ; le nombre inférieur marque en combien de parties l'unité eſt diviſée : on lui donne le nom de *dénominateur*. Si l'unité eſt abſtraite, la fraction eſt abſtraite; elle eſt concrete ſi l'unité eſt concrete.

Les caracteres employés en Arithmétique, ſont au nombre de dix, dont voici la figure & la valeur :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
Un, deux, trois, quatre, cinq, ſix, ſept,
8, 9, 0.
huit, neuf, zéro.

Le dernier de ces caracteres n'a point de valeur par lui-même, mais il ſert à augmenter celle des autres quand on le place à leur gauche. Il eſt poſſible, & l'expérience le prouve, qu'on peut avec ces dix caracteres repréſenter tous les

nombres finis. Il eſt de convention reçue que ſi pluſieurs de ces nombres ſont écrits de ſuite, le dernier à droite ſignifie ſimplement des unités, le ſecond des dixaines d'unités, le troiſiéme des centaines, ou des dixaines de dixaines, & ainſi de ſuite. On a donné à cette gradation le nom de progreſſion décuple. L'unité change de nom quand elle va au-delà des centaines, elle prend alors celui de mille; or dans l'arrangement des chiffres on peut avoir des unités de mille, des dixaines de mille, & des centaines de mille; paſſé cela, l'unité prend le nom de million, billion, trillion, &c. Ceci admis, ſi on avoit une collection de chiffres telle que la ſuivante:

743, 428, 236;

on partageroit cette collection en tranches de chacune trois chiffres, en allant de la droite à la gauche; la tranche à droite contiendroit des millions, la tranche intermédiaire des milles, enfin la tranche à droite ſeulement des unités de la premiere eſpéce, ou des unités ſimples. Dans l'Arithmétique on opére ſur des quantités homogènes, ou ſur des quantités hétérogènes: on appelle quantités homogènes, celles de la même nature; & quantités hétérogènes,

celles de nature différente. On donne auſſi le nom de quantités incomplexes & de quantités complexes à celles que nous venons de déſigner par celui de quantités homogènes & de quantités hétérogènes.

Le premier pas qu'il faut faire en Arithmétique, après avoir connu les chiffres, leur valeur intrinſéque & leur valeur locale, eſt de ſçavoir exprimer avec ces chiffres un nombre propoſé, ou d'énoncer par le diſcours une ſomme donnée en chiffres.

Pour exprimer avec les chiffres un nombre fini propoſé, il faut faire attention à la nature de l'unité la plus grande; ſçavoir, ſi on a des unités, des dixaines, des centaines de cette eſpéce d'unité, former enſuite autant de tranches qu'il y a d'unités différentes; renfermer dans chacune de ces tranches les quantités de la même eſpéce: je ſuppoſe, par exemple, qu'il s'agiſſe d'exprimer en chiffre la ſomme trois cent quarante millions deux cent ſoixante-quinze mille deux cent trente-ſix, on formera trois tranches; dans la premiere à gauche on placera les millions qu'on exprimera avec trois chiffres; on fera de même des milles qu'on déſignera auſſi par trois chiffres, & on en uſera de la même maniere par rapport aux unités ſimples; enſorte

que l'exemple rendu en chiffre aura la forme & l'arrangement ſuivant :

Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Unités de millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Unités de mille.	Centaines simples.	Dixaines simples.	Unités ſimples.
3	4	0,	2	7	5,	2	3	6.

Faut-il énoncer par le diſcours une ſomme telle que la ſuivante :

7 4 8, 3 7 7, 5 9 6, 6 3 8 ;

Je la partage par tranche de chacune trois chiffres ; & ſçachant que l'unité la plus grande contient des billions, & que chaque tranche ayant trois figures, renferme des unités, des dixaines & des centaines ; j'énonce ainſi la ſomme propoſée : ſept cent quarante-huit billions, trois cent ſoixante-dix-ſept millions, cinq cent quatre-vingt-ſeize mille, ſix cent trente-huit. Quand il y a un ou pluſieurs zéros dans une tranche, on n'appelle point ces zéros ; on ſe contente ſeulement de faire ſentir la valeur des autres figures, ſuivant le rang qu'elles occupent.

Les nombres étant ainſi que les autres grandeurs ſuſceptibles d'augmentation & de diminution, il y a en général deux ſor-

tes d'opérations ; par les unes on parvient à les augmenter ; par les autres on les diminue. Les opérations de la premiere eſpéce ſont connues ſous les noms d'Addition, de Multiplication & d'Extraction ou formation des puiſſances. Les opérations de la ſeconde eſpéce renferment la Souſtraction, la Diviſion, les Extractions de racines. Nous ne parlerons point dans ce petit Traité de la formation des puiſſances & de l'extraction des racines ; on trouvera les principes de l'un & de l'autre dans l'Introduction à l'Analyſe.

De l'Addition.

L'addition en général eſt une opération par laquelle on prend la ſomme ou le total de pluſieurs ſommes particulieres.

L'addition des nombres homogènes ſe fait en ordonnant d'abord les quantités les unes ſous les autres, de maniere que toutes les unités ſoyent dans une même colonne, les dixaines dans une autre, les centaines dans une troiſiéme, les milles dans, &c. on tire une ligne deſſous, enſuite on joint enſemble toutes les unités : or leur ſomme peut s'exprimer par un ſeul chiffre ou par deux ; dans le premier cas on écrit ce chiffre ſous la colonne des unités ; dans le ſecond cas on n'écrit que celui des

unités, & on retient celui des dixaines pour l'ajouter à ceux de la ſeconde colonne; regardant ſucceſſivement chaque colonne, excepté la derniere à gauche, comme ne contenant que des unités, relativement à celle qui la précéde, on opérera par rapport à chacune comme on aura fait relativement à la premiere colonne; on obſervera après avoir ajouté la derniere colonne, d'écrire les unités du total ſous cette colonne, & de porter en avant le chiffre des dixaines, l'opération ſera finie.

Soit propoſé d'ajouter les ſommes 3476, 538, 249, 849; j'écris ces ſommes comme vous le voyez dans l'exemple:

	3	4	7	6
		5	3	8
		2	4	9
		8	4	9
Somme totale	5	1	1	2

Je commence l'opération par les unités, en diſant 6 & 8 font 14, & 9 font 23, & 9 font 32; dans 32 il y a deux unités & trois dixaines d'unités, j'écris le 2 ſous la premiere colonne, & je retiens les trois dixaines pour les joindre à la colonne ſuivante; je dis donc 3 de retenu

& 7 font 10, & 3 font 13, & 4 font 17, & 4 font 21 ; je poſe 1 & retiens 2 : paſſant à la troiſiéme colonne, je dis 2 de retenus & 4 font 6, & 5 font 11, & deux font 13, & 8 font 21 ; je poſe 1 & retiens 2 ; allant à la derniere colonne je dis 2 de retenu & 3 font 5, que j'écris ſous cette colonne, on a pour ſomme totale 5112.

Démonſtration

On aura démontré que la ſomme totale eſt égale à toutes les ſommes particulieres, ſi on prouve que cette ſomme totale contient autant d'unités, de dixaines, de centaines, de milles, &c. que les ſommes particulieres réunies. Or cela eſt ainſi ; car on a pris d'abord la ſomme des unités, on en a trouvé trente-deux, c'eſt-à-dire, trois dixaines d'unités, plus deux unités ; on a écrit ces deux unités ſous la premiere colonne, & retenu les trois dixaines pour les joindre à la colonne ſuivante : cette ſeconde colonne contient dix-huit dixaines, leſquelles jointes avec les trois retenues, font vingt-une dixaines, ou deux centaines & une dixaine ; on a écrit la dixaine & retenu les deux centaines qu'on a ajoutées à la colonne des centaines ſur laquelle on a opéré de la même maniere ; on en a uſé de même

par rapport à la colonne des milles. Il y a donc dans le total autant d'unités, de dixaines, de centaines & de milles, qu'il s'en trouve dans les ſommes particulieres réunies. Ce total eſt donc égal aux quatre nombres propoſés; *ce qu'il falloit démontrer.*

L'addition des nombres hétérogènes ou des nombres complexes ne diffère de l'addition des nombres homogènes, qu'en ce qu'il faut faire, s'il eſt permis de parler ainſi, autant d'additions particulieres qu'il ſe trouve d'eſpéces différentes. Il faut, avant tout, connoître combien une eſpéce inférieure eſt contenue de fois dans une unité de l'eſpéce qui eſt immédiatement au-deſſus; & placer tous les nombres qui déſignent des quantités de la même eſpéce dans un même rang. On peut avoir à opérer ſur des toiſes ou des parties de la toiſe, ou ſur des livres monnoies & des parties de la livre; ou ſur la livre marchande, & ſur des parties de cette livre: je vais donner dans la table ſuivante les rapports de chacune de ces unités particulieres avec leurs parties.

*Table des parties aliquotes * de la toiſe.*

Une toiſe contient 6 pieds.
Le pied contient 12 pouces.
Le pouce contient 12 lignes.
La ligne contient 12 points.
La toiſe quarrée contient 36 pieds.
Le pied quarré contient 144 pouces.
Le pouce quarré contient 144 lignes.
La ligne quarrée contient 144 points.
La toiſe cube contient 216 pieds cubes.
Le pied cube contient 1728 pouces cubes.
Le pouce cube contient 1728 lignes cubes.

Parties aliquotes de la livre monnoie.

Une livre contient 20 ſols.
Le ſol contient 12 deniers.

Parties aliquotes de la livre marchande.

Une livre marchande contient 16 onces ou 2 marcs. Le marc contient 8 onces.
Une once contient 8 gros.

* On nomme parties aliquotes, celles qui répétées un certain nombre de fois juſte, compoſent un entier; & parties aliquantes, celles qui ſont compriſes un certain nombre de fois avec un reſte: 15 ſols eſt une partie aliquote de la livre; & 17 ſols une partie aliquante.

Le gros contient 3 deniers ou trois ſcrupules.

Le denier ou le ſcrupule contient 24 grains.

Parties aliquotes du jour.

Un jour ſe diviſe en 24 heures.
L'heure ſe diviſe en 60 minutes.
La minute ſe diviſe en 60 ſecondes.
La ſeconde ſe diviſe en 60 tierces.

Parties aliquotes du cercle.

Un cercle ſe diviſe en 360 parties égales, qu'on nomme degrés.

Le degré ſe diviſe en 60 parties égales, appellées minutes.

La minute ſe diviſe en 60 parties égales, qu'on nomme ſecondes.

Une ſeconde ſe diviſe en 60 tierces.

EXEMPLES D'ADDITION DE NOMBRES COMPLEXES.

Premier exemple.

	744 toiſes	5 pieds	8 pouc.
	324	3	9
	226	4	11
Total	1296 toiſes	2 pieds	4 pouc.

Second exemple.

	548 livres	19 sols	11 den.
	322	17	10
	424	15	8
Total	1296 livres	13 sols	5 den.

Troiſiéme exemple.

	34 livres	1 marc	7 onces	6 gros	2 den.
	28	1	5	4	1
	36	1	4	5	2
	48	1	3	4	2
Total	149 livres	0 marc	5 onces	5 gros	1 den.

Si on a bien ſaiſi la méthode générale de l'Addition, ſi l'on s'eſt rendu bien familiere la table des parties aliquotes, on ne trouvera aucune difficulté à faire les additions compoſées de nos trois exemples, & même quelqu'addition du même genre que ce ſoit.

La démonſtration que j'ai donnée, eſt également applicable dans tous les cas : on peut faire la preuve de l'addition par l'addition même, en recommençant l'opération de bas en haut, ſi la premiere fois on a opéré en comptant de haut en bas : lorſque l'addition eſt bien faite on trouve le même réſultat.

De la Souſtraction.

Souſtraire un nombre d'un autre, c'eſt prendre la différence de ces deux nombres : on écrit le plus petit ſous le plus grand, de maniere que les parties de l'un ſoient ſous les parties correſpondantes de l'autre ; les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. cela fait on retranche, quand cela eſt poſſible, les unités, les dixaines, les centaines du nombre inférieur, des unités, des dixaines & centaines du nombre ſupérieur ; il peut arriver que quelques-uns des chiffres du nombre inférieur ſoient plus grands que ceux du nombre ſupérieur qui leur correſpondent : dans ce cas on emprunte ſur le nombre qui le précéde, une de ſes unités qu'on joint par la penſée au nombre ſur lequel on doit opérer ; la ſouſtraction peut ſe faire alors. Donnons quelques exemples, ils rendront ceci plus clair & plus ſenſible.

Soit propoſé de ſouſtraire 374986 de 486997, j'écris ces deux nombres comme vous les voyez :

De	4 8 6 9 9 7
Souſtraire	3 7 4 9 8 6
Reſte	1 1 2 0 1 1

Commençant par les unités, je dis 6 ſouſtrait de 7, il reſte 1, que j'écris; je dis enſuite 8 de 9, il reſte 1; 9 de 9, il ne reſte rien; 4 de 6, il reſte 2; 7 de 8, il reſte 1; enfin, 3 de 4, il reſte 1: l'opération eſt finie; on a pour différence 112011.

De 3 0 0 0 0 0, il faut ſouſtraire
2 9 7 6 9 8

Reſte 0 0 2 3 0 2

Tous les caracteres du nombre ſupérieur, ſi l'on excepte le premier, n'ont point de valeur par eux-mêmes, on eſt obligé d'emprunter une de ſes unités; or cette unité vaut 100000, qu'il faut décompoſer dans les nombres ſuivans:

90000, 9000, 900, 90, 10;

leſquels pris enſemble, équivalent à ce nombre.

On imaginera par la penſée les premiers caracteres de chacun de ces nombres au-deſſus des zéros qui correſpondent à leur

rang, & l'on opere en disant : 8 de 10, il reste 2, qu'on écrit sous la colonne des unités ; ensuite 9 de 9, il ne reste rien, on écrit 0 ; 6 de 9, il reste 3, qu'on pose, 7 de 9, il reste 2, qu'on écrit, 9 de 9, il ne reste rien, on met 0 ; enfin, 2 de 2, il ne reste rien, on écrit encore 0 ; l'opération est finie.

Démonstration.

Que se propose-t-on dans la Soustraction ? De trouver, comme la définition le porte, la différence de deux nombres donnés ; or c'est à quoi l'on parvient en suivant la régle prescrite : en effet, on ôte les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, & à chaque fois on écrit le reste sous la colonne sur laquelle on opére : les nombres écrits dessous ces colonnes expriment donc la différence cherchée, c'est-à-dire, ce qu'il manque au plus petit nombre pour être égal au grand. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Les exemples que nous avons donnés ne contiennent que des nombres homogènes ; si on proposoit une soustraction de nombres complexes, on en viendroit aisément à bout, en se rappellant combien il faut d'unités de la plus petite espéce pour en

compoſer une d'un ordre ſupérieur, il ſuffiroit pour cela de recourir à la table des parties aliquotes que nous avons donnée ci-devant; voici différens exemples qu'on peut conſulter.

Premier exemple.

De	374#	15ſ	9d.
il faut ôter	28	17	10
Reſte	345	17	11

Second exemple.

De	248#	19ſ	11d.
il faut ôter	124	17	10
Reſte	124	02	1

Troiſiéme exemple.

De	824#	17ſ	11d.
il faut ôter	733	19	10
Reſte	090	18	1

On s'aſſurera qu'on ne s'eſt point trompé dans l'opération de la ſouſtraction, ſi en ajoutant la plus petite quantité avec le reſte, on retrouve la plus grande; c'eſt une ſuite de la définition & de la démonſtration.

De

De la Multiplication.

Multiplier un nombre par un autre, c'eſt en chercher un troiſiéme appellé produit, qui ſoit au multiplicande ce que le multiplicateur eſt à l'unité. Les deux nombres à multiplier ſe nomment facteurs ; on donne ordinairement le nom de multiplicande au plus grand facteur, & celui de multiplicateur au plus petit.

On diſtingue deux ſortes de multiplications, celle des nombres ſimples & celle des nombres complexes : dans la multiplication des nombres ſimples, on écrit le multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on multiplie tous les chiffres de ce dernier par chacun de ceux du premier ; ce qui donne autant de produits particuliers qu'il y a de figures dans le multiplicateur. On ſera ſans doute ſurpris de ce qu'on avance d'un rang vers la gauche le premier chiffre du ſecond produit, & qu'on écrit les unités de ce produit ſous les dixaines du premier : on en ſentira la raiſon, ſi l'on fait attention que multiplier par le ſecond chiffre du multiplicateur, c'eſt multiplier, non par des unités ſimples, mais par des dixaines d'unités ; enſorte que ſi on a à multiplier 2 par 3, c'eſt la même choſe que ſi on multiplioit réellement 2 par 30, c'eſt-à-dire,

par un nombre compoſé de deux figures : le produit 60 qui réſulte de cette multiplication, étant compoſé de deux figures, on ſuppoſe le zéro qui tient lieu des unités, placé ſous les unités ; le 6, qui repréſente les dixaines, trouve néceſſairement ſon rang ſous les dixaines. En ſuivant le même raiſonnement, on verra pourquoi le premier chiffre du troiſiéme produit ſe met ſous la troiſiéme colonne, & pourquoi on écrit le premier chiffre du quatriéme produit ſous la quatriéme colonne ; c'eſt que dans ces deux derniers cas on a à multiplier tout le multiplicande par des centaines & par des milles.

Il faut, avant d'entreprendre de faire la multiplication, ſçavoir la table de Pythagore, connu ſous le nom de Livret, on en trouve de différentes eſpéces, mais celle qui eſt gravée à la fin de ce Traité, nous a paru la plus ſimple & la plus aiſée à retenir.

De la multiplication d'un nombre homogène par un nombre homogène.

Pour multiplier un nombre homogène par un nombre homogène, il faut écrire celui qu'on prend pour multiplicateur ſous celui qu'on a choiſi pour multiplicande, en les ordonnant de maniere que les unités, les dixaines, &c. du premier, ſoient ſous

les unités, les dixaines, &c. du ſecond; tirer une barre deſſous : multiplier enſuite tous les chiffres du multiplicande par les unités du multiplicateur.

On multipliera enſuite tout le multiplicande par les dixaines du multiplicateur, en obſervant, comme je l'ai déja dit, d'avancer le produit en plaçant les unités ſous les dixaines du multiplicande ; on ſuivra le même procédé pour les centaines, pour les milles, &c.

Soit propoſé de mutiplier le nombre 7428 par 36 ; j'écris ces nombres comme vous le voyez :

		7	4	2	8
				3	6
	4	4	5	6	8
2	2	2	8	4	0
2	6	7	4	0	8.

Je dis enſuite 6 fois 8 font 48, comme ce nombre eſt compoſé de deux figures, j'écris ſeulement celle qui repréſente les unités, & retiens les dixaines pour les joindre au produit des dixaines, je dis donc 2 fois 6 font 12 dixaines, & 4 de retenues font 16 ; je poſe le 6 & retiens la dixaine de dixaine ou la centaine, pour la join-

dre au produit des centaines; je dis enſuite 4 fois 6 ſont 24, & 1 ſont 25, je poſe 5 & retiens 2; je paſſe aux milles, & dis 6 fois 7 ſont 42, & 2 de retenus ſont 44; je poſe 4 & avance 4. Je multiplie enſuite toutes les figures du multiplicande par le ſecond chiffre du multiplicateur, en diſant 3 fois 8 ſont 24; comme le nombre 3 répréſente des dixaines, il faut imaginer un zéro à la droite de 24; ce qui donne le produit 240 : on voit d'après cela la néceſſité de placer le 4 ſous la colonne des dixaines, je le poſe en effet, & je retiens le 2 pour le joindre au produit de la colonne ſuivante; je dis enſuite 3 fois 2 ſont 6, & 2 de retenues ſont 8, que j'écris; je paſſe à la colonne ſuivante, & dis 3 fois 4 ſont 12, je poſe 2 & retiens 1; paſſant enfin à la derniere figure, je dis 3 fois 7 ſont 21, & 1 de retenu ſont 22, je poſe 2 & avance 2, j'ajoute les deux produits pour avoir le produit total 267408 : l'opération eſt faite. On peut en faire la preuve de la maniere ſuivante, qui eſt fondée ſur le principe ſuivant, qu'on peut regarder comme axiome. C'eſt la même choſe de multiplier un nombre par un autre, ou de multiplier le double du premier par la moitié du ſecond : cela poſé, je double 7428, & j'ai pour multiplicande 14856; je prends la moitié

de 36, ce qui donne 18 pour multiplicateur, je multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, après les avoir ordonnés comme vous le voyez dans l'exemple :

	1	4	8	5	6
				1	8
1	1	8	8	4	8
1	4	8	5	6	0
2	6	7	4	0	8

L'opération faite on retrouve le même total, ce qui prouve que l'on ne s'eſt pas trompé.

Si l'on a bien ſaiſi la méthode que nous avons ſuivie dans cet exemple, on ne trouvera aucune difficulté à faire les ſuivans :

EXEMPLES DE MULTIPLICATIONS SIMPLES.

Premier exemple.

		8	5	4	6
			3	2	8
	6	8	3	6	8
1	7	0	9	2	0
2	5	6	3	8	0	0
2	8	0	3	0	8	8

Second exemple.

			5	7	3	4
				4	2	6
		3	4	4	0	4
	1	1	4	6	8	0
2	2	9	3	6	0	0
2	4	4	2	6	8	4

Troiſiéme exemple.

			5	8	9	6
				4	2	2
		1	1	7	9	2
	1	1	7	9	2	0
2	3	5	8	4	0	0
2	4	8	8	1	1	2.

Démonſtration de la Multiplication.

On aura prouvé qu'un nombre eſt le produit d'une multiplication propoſée, ſi l'on fait voir que ce produit contient autant de fois le nombre multiplié, que le multiplicateur renferme d'unités, de dixaines, de centaines, &c. Or c'eſt ce qui arrive quand on ſuit pour la multiplication, la méthode que nous venons d'expoſer : en effet, on multiplie d'abord le

multiplicande par les unités du multiplicateur ; ce qui donne un premier produit partiel : on multiplie enſuite tout le multiplicande par les dixaines du multiplicateur, ce qui donne un ſecond produit partiel. On fait la même choſe par rapport aux centaines, &c. du multiplicateur ; ce qui donne un troiſiéme produit partiel : enfin, on ajoute ces différens produits partiels pour en former le produit total. Ce produit total eſt donc égal à ces différens produits partiels réunis : il eſt formé du produit du multiplicande par les unités, les dixaines, les centaines, &c. du multiplicateur, c'eſt-à-dire, du produit de tout le multiplicande par tout le multiplicateur. Donc il contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient d'unités, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La multiplication & la diviſion des nombres complexes par les parties aliquotes exigeant quelques connoiſſances des fractions, nous n'en parlerons qu'après avoir enſeigné la maniere d'opérer ſur ces dernieres ; je paſſe donc tout de ſuite à la Diviſion des nombres incomplexes.

De la Diviſion.

La Diviſion eſt une opération par la-

quelle on cherche combien un nombre eſt contenu dans un autre; le plus grand ſe nomme *dividende*, le plus petit ſe nomme *diviſeur*, & le réſultat eſt appellé *quotient*.

Il y a deux ſortes de diviſions, celle des nombres homogènes, & celle des nombres hétérogènes.

Pour diviſer un nombre ſimple par un nombre ſimple, par exemple, le nombre 336 par 24.

J'écris le diviſeur à la droite du dividende, je ſépare l'un de l'autre par un crochet, & je tire une ligne ſous tous les deux, comme vous le voyez dans l'exemple :

3 3 6	2 4
2 4	1 4 quotient.
9 6	
0 0	

Cela poſé, je compare le diviſeur au dividende, & trouvant que 24 eſt contenu une fois dans 33, je poſe 1 au quotient; je ſouſtrais 24 de 33, il reſte 9 que je poſe ſous le 4; j'abaiſſe le dernier chiffre 6, ce qui me donne 96 pour nouveau dividende, lequel étant diviſé par 24, donne 4 pour quotient, que j'écris à côté de la premiere figure; multipliant le diviſeur 24 par ce nombre, je trouve le produit

96 qui eſt égal au dividende, par conſéquent il ne reſte rien.

Faut-il diviſer 1152 par 24, ayant ordonné ces deux nombres comme vous le voyez :

1 1 5 2	2 4
9 6	4 8
1 9 2	
1 9 2	
0 0 0	

Je compare le diviſeur au dividende, & comme les deux premieres figures de celui-ci ſont plus petites que le diviſeur, j'en prends trois ; je diviſe donc 115 par 24, ou plutôt je dis en 11 combien y a-t-il de fois 2 ? 5, que j'eſſaye en le multipliant par 24 ; & comme le produit 120 eſt plus grand que le dividende 115, je conclus que 5 eſt trop grand ; j'eſſaye 4, il vient 96 au produit, ce nombre étant plus petit que 115, je poſe 4 au quotient, & je ſouſtrait 96 de 15, il reſte 19, à côté duquel j'abaiſſe 2 ; ce qui donne 192 pour nouveau dividende, ſur lequel j'opere comme dans le premier cas, en diſant combien de fois 2 en 19, je trouve 9, lequel eſſayé donne un produit trop grand ; c'eſt pourquoi je prends 8 & le multiplie par 24 ; le produit 192

eſt égal au dividende : 8 eſt donc la ſeconde figure du quotient, je le poſe à côté de la premiere, & l'opération eſt faite. Il arrive très-ſouvent qu'après avoir pouſſé la diviſion autant qu'il eſt poſſible, il ſe trouve un reſte, cela vient de ce que le dividende n'eſt pas un produit exact du quotient par le diviſeur; dans ce cas, on convertit le reſte en eſpéce plus petite, en la multipliant par le nombre qui indique combien il en faut de cette eſpéce pour compoſer une unité de celles ſur leſquelles on a d'abord opéré. Pour nous ſervir d'un exemple, je ſuppoſe que le dividende ſoit compoſé de livres, & qu'après avoir fini l'opération, il en reſte, on les convertiroit en ſols, en multipliant par 20, nombre qui indique combien le ſol eſt contenu de fois dans la livre; cette converſion faite, ſi le nombre réduit eſt plus grand ou égal au diviſeur, on fait la diviſion, ſinon on convertit les ſols en deniers, en les multipliant par 12; ſi enfin le nombre, après cette derniere réduction, ſe trouvoit encore plus petit que le diviſeur, ce ſeroit une marque que la diviviſion n'eſt pas poſſible; alors on écrit le reſte à côté du quotient, en forme de fraction, dont il ſeroit le numérateur, le diviſeur ſeroit le dénominateur.

Démonſtration de la Diviſion.

Que ſe propoſe-t-on dans la Diviſion? De trouver, comme la définition le porte, combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or c'eſt à quoi on parvient en ſuivant les régles preſcrites; en effet, on cherche d'abord combien de fois les premiers chiffres du dividende contiennent le diviſeur, & l'on poſe ſous le diviſeur pour partie du quotient, le nombre qui indique cette quantité de fois: la multiplication & la ſouſtraction faite, on abaiſſe à côté du reſte, s'il y en a un, la ſuite ou une portion de la ſuite du dividende; on opére ſur ce nouveau dividende de la même maniere que l'on a opéré ſur le premier membre; on en uſe de même juſqu'à ce que tout le dividende ſoit épuiſé, en obſervant de poſer à chaque fois au quotient les nombres convenables, c'eſt-à-dire, ceux qui indiquent combien de fois le diviſeur eſt renfermé dans chaque membre de diviſion; par conſéquent le quotient total exprime (à un reſte près, moindre que l'unité s'il y en a) combien de fois le dividende contient le diviſeur. Donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La preuve de la Diviſion ſe fait en multipliant le quotient par le diviſeur, & en

ajoutant au produit total le reſte, s'il y en a un.

Des Fractions.

On donne le nom de fraction ou de nombre rompu à une quantité qui exprime en combien de parties égales un tout eſt diviſé, & combien on prend de ces parties. Par exemple, la fraction $\frac{5}{7}$, indique qu'on a diviſé un tout en ſept parties égales, & qu'on a pris 5 de ces parties: le chiffre d'en haut ſe nomme numérateur, on donne celui de dénominateur au chiffre d'en bas. On ſépare, comme l'on voit, ces deux chiffres par une barre. Comme on peut diviſer un tout, quel qu'il ſoit, d'un nombre infini de manieres, il ſuit qu'il y a une infinité de fractions: il y a plus, ſi les nombres qui compoſent des fractions, ſont tels que les numérateurs des unes contiennent autant de parties de leurs dénominateurs, que les numérateurs des autres en contiennent du leur, ces fractions ſont équivalentes & égales; par conſéquent il ſuit qu'il peut y avoir un nombre infini de fractions équivalentes.

On diſtingue deux ſortes de fractions, des fractions vulgaires & des fractions décimales. Nous ne parlerons dans cet abrégé que des fractions vulgaires, ayant trai-

té de ces dernieres dans l'Introduction à l'Analyſe.

Principe fondamental.

On ne change point la valeur d'une fraction, ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe les deux termes par une même quantité ; en effet, dans le premier cas le dénominateur devient plus grand, c'eſt-à-dire, que le tout eſt diviſé dans un plus grand nombre de parties ; mais, comme le numérateur a été augmenté de la même maniere, il s'enſuit qu'on prend un nombre de parties proportionnelles à celles qu'on prenoit avant la multiplication. Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, lorſqu'on a recours à la diviſion, comme on diminue le numérateur & le dénominateur également, les parties de la fraction gardent encore le même rapport entr'elles, alors la fraction ainſi réduite, eſt équivalente à la premiere.

Opérations préliminaires ou réductions.

Les réductions ſont certaines transformations qu'on fait ſubir aux fractions, ſoit pour les ſimplifier, ſoit pour leur donner un même dénominateur : ces réductions doivent être telles que les fractions ne changent point de valeurs ; elles ſont fondées

ſur le principe que nous venons d'établir.

Réduction des fractions à de moindres termes.

Pour réduire une fraction à de moindres termes, il faut trouver une commune meſure de ces deux termes, & diviſer l'un & l'autre par cette commune meſure; pour y parvenir, on diviſe le dénominateur par le numérateur, & on laiſſe à part le quotient, en faiſant attention au reſte, s'il y en a un; car s'il ne reſte rien, le quotient eſt le plus grand commun diviſeur, celui qui ſervira à ſimplifier la fraction; dans ce cas on diviſe les deux termes par ce nombre, & l'opération eſt faite: ſi au contraire il y a un reſte, il faut diviſer la plus petite quantité ou le numérateur par ce reſte, & ſi la diviſion ſe fait exactement, le quotient eſt la commune meſure cherchée: enfin s'il y a un ſecond reſte, on diviſe le premier par le ſecond, & dans le cas où l'opération ne laiſſe point de troiſiéme, le quotient eſt le plus grand commun diviſeur demandé. On conçoit que s'il avoit un troiſiéme, un quatriéme, &c. reſte, il faudroit continuer d'opérer juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un dernier réſultat qui n'en donnât point. Soit propoſé de réduire à de moindres termes la fraction $\frac{8}{12}$, di-

viſant 12 par 8, on trouvera 1 pour quotient, & 4 de reſte ; négligeant ce quotient, je diviſe 8 par le reſte 4, le quotient eſt 2, il ne reſte rien ; d'où je conclus que 2 eſt la plus grande commune meſure, ou le plus grand commun diviſeur des deux termes de la fraction $\frac{8}{12}$, qui eſt équivalente à $\frac{2}{3}$.

Soit la fraction $\frac{15}{60}$ à réduire à de moindres termes. Je diviſe 60 par 15, je trouve le quotient 4, & point de reſte ; j'eſſaye de diviſer l'un & l'autre nombres par ce quotient, la diviſion n'eſt pas poſſible ; je tente la diviſion des deux termes par 5, il me vient pour quotient la fraction $\frac{3}{12}$, laquelle eſt encore réductible, parce que les deux termes de cette fraction ſont diviſibles par le numérateur 3 : en effet, en faiſant réellement la diviſion, on a pour dernier réſultat la fraction $\frac{1}{4}$, qui eſt équivalente à la fraction $\frac{15}{60}$, parce que le numérateur 15 de cette fraction eſt le quart de ſon dénominateur, de même que le numérateur 1 de la fraction $\frac{1}{4}$, eſt la quatriéme partie de ſon dénominateur ; c'eſt encore une ſuite du principe fondamental. Quand les deux termes de la fraction à réduire ſont terminés par des zéros, il faut, avant de tenter la réduction, effaçer le même nombre de zéros dans les deux ter-

mes, eſſayer enſuite de trouver un diviſeur commun aux deux termes de la fraction, pour parvenir à la ſimplification requiſe.

Réduction des fractions au même dénominateur.

Pour réduire des fractions au même dénominateur il faut multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des autres numérateurs. Propoſe-t-on de réduire les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ au même dénominateur, je multiplie le numérateur 2 de la premiere par le dénominateur 6 de la ſeconde, & le numérateur 5 de la ſeconde par le dénominateur 3 de la premiere, j'ai les deux nouveaux numérateurs 12 & 15, ſous chacun deſquels j'écris 18, produit des dénominateurs, les fractions réduites au même dénominateur ſont les ſuivantes : $\frac{12}{18}$ & $\frac{15}{18}$; ſi l'on avoit plus de deux fractions, on ſuivroit la même méthode.

Que l'on propoſe, par exemple, de réduire au même dénominateur les trois fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, on multiplieroit d'abord les deux termes 5 & 6 de la premiere fraction par le produit 12 des deux autres fractions ; la fraction réduite ſeroit $\frac{60}{72}$, on multiplieroit enſuite les deux termes de la fraction $\frac{3}{4}$ par le produit 18 des dénominateurs 6 & 3 des deux autres fractions, ce

ce qui donneroit la fraction réduite $\frac{54}{72}$, paſſant enſuite à la troiſiéme, on multiplieroit ſes deux termes 2 & 3 par le produit 24 des dénominateurs 6 & 4 des autres fractions, on auroit la fraction réduite $\frac{48}{72}$; s'il y avoit plus de trois fractions à réduire, on y parviendroit en ſuivant le même procédé. Il eſt un autre moyen de réduire les fractions au même dénominateur, qu'on peut employer dans bien des occaſions, ſur-tout quand le plus grand nombre des dénominateurs ſont ſous-multiples d'un nombre quelconque; il ſuffit alors de multiplier d'abord par ce nombre ceux des dénominateurs qui n'en ſont pas ſous-multiples, par cette opération ils le deviennent, le produit eſt le dénominateur commun; cela fait, pour avoir les numérateurs des fractions réduites, on multiplie chacun des numérateurs des fractions à réduire pat le quotient du dénominateur commun, diviſé par le dénominateur de la fraction ſur laquelle on opére actuellement; on voit qu'on ne fait alors que ce que l'on a fait en ſuivant la premiere méthode; c'eſt-à-dire, que l'on multiplie les deux termes de chaque fraction par une même quantité: un exemple rendra ceci plus ſenſible.

Soit propoſé de réduire au même dé-

nominateur, les fractions ſuivantes :

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{4}{9}$:

Je cherche d'abord le plus petit nombre multiple des dénominateurs, je vois que 24 les contient tous, excepté le dernier ; je multiplie 24 par ce dernier, & j'ai pour le produit 216, pour le dénominateur commun, je l'écris à la droite de toutes les fractions, comme vous le voyez :

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{4}{9}$, 216.

J'opere enſuite en faiſant autant de diviſions & de multiplications particulieres qu'il ſe trouve de fractions, je parviens par ce moyen à convertir ces fractions en d'autres équivalentes ; je dis donc pour la premiere 216, diviſée par 2, donnent 108, leſquels multipliés par 1, il vient 108 pour le numérateur de la premiere fraction, ſous lequel on met le dénominateur 216, la fraction réduite eſt $\frac{108}{216}$; je paſſe à la ſeconde, en diſant 216 diviſés par 4, donnent 64, que je multiplie par le numérateur 3, le produit 162 eſt le numérateur de la ſeconde fraction qui a auſſi 216 pour dénominateur : venons à la troiſiéme, je dis la ſixiéme partie de 216 eſt 36, leſquels multipliés par le numérateur 5, donnent le produit 180, ſous

lequel on écrit 216 : la troiſiéme fraction réduite eſt $\frac{180}{216}$; la quatriéme & la cinquiéme traitées de même maniere, deviennent les ſuivantes, $\frac{189}{216}$ & $\frac{96}{216}$: toutes ces fractions s'ordonnent de la maniere ſuivante :

$$\frac{108}{216}, \frac{162}{216}, \frac{180}{216}, \frac{189}{216}, \frac{96}{216}.$$

Réduction des entiers en fractions.

Veut-on convertir un entier en une fraction qui ait un dénominateur donné, on multiplieroit l'entier par ce dénominateur, le produit ſeroit le numérateur de la fraction demandée, on lui donneroit pour dénominateur le nombre propoſé. Demande-t-on de réduire le nombre entier 6 en une fraction dont le dénominateur ſoit 15 ; je multiplie 6 par 15, & j'écris 15 ſous le produit 90, ce qui donne la fraction $\frac{90}{15}$. Puiſque l'on convertit un entier en fraction, en le multipliant & en le diviſant en même-temps par une même quantité, il ſuit que l'on réduira tous les entiers poſſibles en fractions, en leur donnant l'unité pour dénominateur.

Réduction des entiers, & fractions en fractions.

Pour réduire un entier & une fraction en une ſeule fraction on multiplieroit l'en-

tier par le dénominateur de la fraction propoſée, on ajouteroit à ce produit le numérateur de cette fraction, & on conſerveroit au tout le dénominateur qu'avoit cette fraction avant la réduction. Qu'il faille, par exemple, réduire l'entier 8 & la fraction $\frac{3}{4}$, en une ſeule fraction équivalente; je multiplie 8 par le dénominateur 4, j'ajoute le numérateur 3 à ce produit, & je donne au tout le dénominateur de la fraction propoſée.

De la multiplication des fractions.

La multiplication & la diviſion des fractions peuvent ſe faire ſans avoir beſoin de les réduire à la même dénomination; comme les opérations ſont plus faciles que l'addition & la ſouſtraction, nous les plaçons avant celles-ci.

Faut-il multiplier deux fractions telles que $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$, l'une par l'autre; on prendra le produit des numérateurs, ſous lequel on écrira celui des dénominateurs; cette fraction, ainſi réduite, ſera le produit des deux premieres, les fractions $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$, traitées de cette maniere, donneront la fraction $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$; c'eſt le produit demandé: a-t-on plus de deux fractions, on écrit ſous le produit de tous les numérateurs

celui des dénominateurs; ainſi $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$, donnent pour produit $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

On trouve dans tous les Auteurs différens cas par rapport à la Multiplication; par exemple, on indique les moyens de multiplier un entier par une fraction, ou une fraction par un entier, & celui de multiplier des fractions les unes par les autres. Il eſt aiſé de voir, d'après ce que j'ai dit ci-devant, qu'ils rentrent l'un & l'autre, ces différens moyens, dans celui que nous avons ſuivi dans les deux exemples précédens, puiſque l'on convertit tout entier en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur: on ſera ſurpris de trouver par la multiplication des fractions un produit plus petit que chacune des fractions multipliées, mais on ſortira de cette ſurpriſe, ſi l'on fait attention à la nature de la multiplication, & ſi on ſe rappelle la définition de la multiplication en général.

Qu'eſt-ce que multiplier un nombre par un autre? C'eſt ajouter le premier autant de fois qu'il eſt indiqué par l'autre; ainſi, pour nous ſervir d'un exemple, multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, c'eſt ajouter $\frac{3}{4}$ deux tiers de fois; c'eſt donc prendre les deux tiers de $\frac{3}{4}$, c'eſt avoir une demie: or c'eſt le réſultat de cette multiplication, car $\frac{3}{4}$ multipliés par $\frac{2}{3}$, donnent $\frac{6}{12}$, leſquels réduits, égalent $\frac{1}{2}$. D'au-

tres Auteurs enviſagent cela d'une autre maniere : lorſque l'on veut, diſent-ils, connoître la valeur du produit d'une fraction par une autre, il faut bien ſe garder de confondre le nouveau produit avec la valeur de l'entier déſigné d'abord, on ne doit le lui comparer qu'autant qu'on aura multiplié cette valeur de l'entier par elle-même ; ainſi, pour nous ſervir du même exemple, quand nous multiplions $\frac{3}{4}$ d'écus par $\frac{2}{3}$, & que nous trouvons $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ pour produit, la valeur de l'entier étant ſuppoſé dans la premiere fraction, égale à 12, & dans la ſeconde égale à 2, il ne faut point, ſuivant les mêmes Auteurs, comparer le produit $\frac{6}{12}$ à 12, ou $\frac{1}{2}$ à 2, mais avec douze fois 12 pour le premier cas, ou avec deux fois 2 ou 4 pour le ſecond cas, parce qu'alors on aura le même réſultat ; la raiſon qu'ils en apportent, c'eſt que tout produit doit être uniquement comparé avec un pareil produit.

De la diviſion des fractions.

Pour diviſer une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviſeur, ce produit ſera le numérateur de la fraction quotient, qui aura pour produit celui du dénominateur de la

premiere fraction par le numérateur de la ſeconde ; qu'il faille diviſer $\frac{5}{6}$ par $\frac{3}{4}$, on multipliera 5 par 4, on aura 20 pour le numérateur de la fraction quotient, à laquelle on donnera pour dénominateur le produit 18 du dénominateur de la fraction dividende, multiplié par le numérateur de la fraction diviſeur ; on auroit le même réſultat en renverſant, comme le font la plûpart des Auteurs, la fraction diviſeur, & en multipliant après par ordre les deux fractions ; c'eſt-à-dire, les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs par les dénominateurs, le réſultat ſeroit encore le même ; multipliant donc $\frac{5}{6}$ par $\frac{3}{4}$, comme on vient de le dire, on trouvera pour quotient $\frac{20}{18}$. Pour prouver la juſteſſe de ce calcul, il ſuffit de multiplier ce quotient par le diviſeur, on retrouve le dividende. On demandera ſans doute pourquoi l'on multiplie ainſi en croix, en voici la raiſon : en multipliant les deux termes de la fraction dividende par un nombre entier, tel, par exemple, que le produit des deux termes de la fraction diviſeur, cela ne doit point changer la valeur de la fraction dividende ; ainſi, en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{5}{6}$ par 12, produit des deux termes de la fraction diviſeur, on a la nouvelle fraction $\frac{60}{72}$, qui eſt (principe

fondamental) équivalente à la premiere, comme on peut s'en assurer par la réduction. Maintenant si l'on divise le numérateur 60 de la fraction $\frac{60}{72}$, par le numérateur 3 de la fraction diviseur, le quotient 20 sera celui de la fraction quotient que nous avons trouvé; de même si l'on divise le dénominateur 72 de la fraction $\frac{60}{72}$ par celui de la fraction diviseur, on aura 18 pour quotient, c'est aussi le dénominateur de la fraction quotient. Le procédé qu'on a suivi, est donc une méthode sûre, qu'on peut & que l'on doit employer dans la division des fractions. Veut-on en avoir une démonstration palpable, indiquons seulement les produits, comme on le fait souvent en Algèbre, nous verrons les quantités qui se détruisent, & celles qui doivent être conservées :

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4}.$$

Dans ce calcul ainsi indiqué, on voit que les nombres 3 & 4 doivent disparoître, puisqu'ils se trouvent comme faisant en même-temps la fonction de multiplicateur & celui de diviseur. Je me suis un peu étendu sur la démonstration de ces deux opérations, parce qu'elles présentent au premier coup d'œil des contradictions apparentes, qu'il est aisé de détruire par le raisonnement.

De l'addition des fractions.

Si les quantités à ajouter ont le même dénominateur, on en trouve la ſomme en prenant celle des numérateurs, ſous laquelle on écrit le dénominateur commun ; ainſi les fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{6}$, égalent $\frac{11}{6}$, & par réduction 1 & $\frac{5}{6}$.

Si les quantités à ajouter ont des dénominateurs différens, on les réduit au même, en ſuivant les régles que nous avons données, pour le reſte, on procéde comme dans l'exemple précédent ; ainſi les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, traitées comme je viens de le dire, deviennent $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, leſquelles ajoutées, égalent $\frac{27}{12}$, ou deux entiers & $\frac{3}{12}$.

De la ſouſtraction des fractions.

Pour ſouſtraire une fraction d'une autre, il faut, quand elles ont le même dénominateur, prendre la différence des numérateurs ſous laquelle on écrit le dénominateur commun ; on s'aſſurera de la juſteſſe de l'opération en ajoutant le reſte avec la quantité à ſouſtraire ; car ſi la ſomme qui réſulte de cette addition eſt égale à la fraction la plus grande, on doit conclure que l'opération eſt exacte ; ainſi $\frac{3}{6}$ ſouſtraits de $\frac{4}{6}$, il reſte $\frac{1}{6}$, comme

on peut s'en convaincre en ajoutant $\frac{1}{6}$ avec $\frac{3}{6}$, la ſomme $\frac{4}{0}$ étant la même choſe que la fraction dont on vouloit retrancher $\frac{3}{6}$. Si les fractions à ſouſtraire ont différens dénominateurs, on commence à les réduire à la même dénomination, & l'on opére enſuite comme on vient de le dire; ainſi, par exemple, pour ſouſtraire $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ ayant réduit ces fractions dans les ſuivantes: $\frac{9}{12}$ & $\frac{10}{12}$, on retranchera $\frac{9}{10}$ de $\frac{10}{12}$, il reſtera $\frac{1}{12}$ pour différence. Si l'on propoſoit de ſouſtraire une fraction d'un entier & d'une fraction, on feroit d'abord attention à la fraction qui accompagne l'entier, pour voir ſi elle eſt plus grande que celle qui doit en être ſouſtraite, ce dont on s'aſſurera en les réduiſant d'abord au même dénominateur, on opérera enſuite comme ci-deſſus; & l'entier, plus la fraction reſtante, ſera la différence cherchée.

La fraction qui accompagne l'entier peut être plus petite que celle qu'on en veut ſouſtraire; dans ce cas on réduit une des unités de l'entier en fraction de même dénomination que celle qui accompagne cet entier: on réduit enſuite cette nouvelle fraction & celle qu'on en veut ſouſtraire, au même dénominateur, & l'on opere comme dans les exemples précédens. Ainſi je ſuppoſe qu'on veuille ſouſtraire $\frac{3}{4}$ de 4

$\frac{2}{3}$; comme la fraction $\frac{2}{3}$ eſt plus petite que la fraction $\frac{3}{4}$, on convertira une des unités de l'entier 4 & la fraction $\frac{2}{3}$ en la fraction $\frac{5}{3}$, & l'on réduira enſuite la fraction $\frac{3}{4}$ & la fraction $\frac{5}{3}$ au même dénominateur, on aura les fractions $\frac{20}{12}$ & $\frac{9}{12}$, il reſtera à ſouſtraire $\frac{9}{12}$ de $3+\frac{20}{12}$, il reſtera $3+\frac{11}{12}$.

Enfin propoſe-t-on de ſouſtraire un entier, plus une fraction d'un entier, accompagné d'une fraction, on réduira les fractions à la même dénomination, en empruntant, ſi cela eſt néceſſaire, ſur un des entiers, après l'on fera l'opération ſuivant les régles preſcrites.

Nous ne dirons rien ici des fractions décimales, en ayant parlé dans l'Introduction à l'Analyſe.

Venons maintenant à la multiplication & à la diviſion des nombres hétérogènes.

De la Multiplication complexe, ou des nombres hétérogènes.

On doit, comme dans la Multiplication des nombres incomplexes, répéter toutes les parties du multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par chaque partie du multiplicateur. Il n'y a quelquefois de la différence que dans le procédé.

Propoſons-nous d'abord de multiplier

Premier exemple.

	347^{ff}	13^{r}	6^{d}
Par	9		
	3129	1	6

Après avoir diſpoſé le multiplicande & le multiplicateur comme on le voit, on commencera la multiplication par les unités de la plus baſſe eſpéce du multiplicande, & l'on dira 9 fois 6 deniers ſont 54 deniers, qui valent 4 ſols & 6 deniers ; on poſera les 6 deniers ſous les deniers du multiplicande, & on retiendra les 4 ſols pour les joindre avec le produit des ſols, que l'on trouvera en diſant, 9 fois 3 ſols ſont 27 ſols, & 4 ſols de retenus, ſont 31 ſols, qui valent 3 dixaines de ſols & 1 ſol, que l'on poſera dans la colonne des unités de ſols, & on retiendra 3 ; puis on dira 9 fois une dixaine de ſols ſont 9 dixaines, & 3 de retenues, ſont 12 dixaines, qui valent 6 livres, que l'on retiendra : enfin paſſant aux livres, on dira 9 fois 7 ſont 63, & 6 de retenues ſont 69 livres ; on poſera 9 livres, & retiendra 6, & on continuera comme dans la multiplication des nombres incomplexes.

Si au lieu d'avoir 9 pour multiplicateur, on avoit eu un nombre plus grand, comme 43, il auroit été embarraſſant de trouver le produit en ſuivant le même procédé. Voici comment il faudra faire pour que l'opération ſoit plus courte & plus facile.

Second exemple.

		347#	13ſ	6d
		43		
		1041		
		1388		
Pour	10ſ	21	10	
Pour	2	4	6	
Pour	1	2	3	
Pour	6d	1	1	6
		14950	0	6

Au lieu de commencer la multiplication par les unités de la plus baſſe eſpéce, on commencera par celles de la plus haute; ainſi on multipliera d'abord 347 livres par 43, préciſément comme dans la multiplication des nombres complexes; enſuite on paſſera aux ſols, & voici les réflexions qu'il faut faire.

Si l'on avoit une livre à multiplier par 43, il eſt ſûr qu'on auroit 43 livres au

produit ; mais c'eſt 13 ſols que l'on a à multiplier par 43, & 13 ſols ſont les $\frac{13}{20}$ de la livre ; donc le produit de 13 ſols par 43 doit être $\frac{13}{20}$ de 43 livres ; mais comme il ſeroit long de prendre treize fois la vingtiéme partie de 43 livres, il eſt plus ſimple de partager 13 ſols en trois parties, ſçavoir, 10 ſols, 2 ſols, & 1 ſol ; alors on raiſonne ainſi, puiſque 10 ſols ne ſont que $\frac{1}{2}$ de la livre, il n'y a qu'à prendre $\frac{1}{2}$ de 43 livres, & l'on aura le produit de 10 ſols par 43. Pour prendre $\frac{1}{2}$ de 43 livres, on dira la moitié de 4 eſt 2, que l'on poſera dans la colonne des dixaines, puis la moitié de 3 eſt 1 pour deux ; il reſte 1 livre, qui vaut 20 ſols, dont la moitié eſt 10, que l'on poſera comme on le voit dans le modele propoſé.

Ce ſera donc 21 livres 10 ſols qui ſera le produit de 10 ſols par 43 ; on dira enſuite, donc 2 ſols, qui ne ſont que le cinquiéme de 10 ſols, ne donneront que la cinquiéme partie de 21 livres 10 ſols, que l'on trouvera être de 4 livres 6 ſols ; & puiſque 1 ſol eſt la moitié de 2 ſols, en prenant la moitié de 4 livres 6 ſols, on aura 2 livres 3 ſols, qui ſera le produit de 1 ſol par 43. Par ce moyen, voilà trois produits ; ſçavoir, celui qu'on a eu pour 10 ſols, qui eſt 21 livres 10 ſols ; celui qu'on

a eu pour 2 ſols, qui eſt 4 livres 6 ſols, & celui qu'on a eu pour 1 ſol, qui eſt 2 livres 3 ſols, qui tous enſemble donneront le produit de 13 ſols par 43. On paſſera de-là aux deniers, & on dira puiſque 6 deniers ſont la moitié de 1 ſol, & que 1 ſol multiplié par 43, donne 2 livres 3 ſols; 6 deniers multipliés par 43, ne produiront donc que la moitié de 2 livres 3 ſols, qui eſt 1 livre 1 ſol 6 deniers, enſorte qu'il ne s'agit plus que de faire une addition de tous ces produits, & alors on aura 14950 livres 0 ſol 6 deniers, qui ſera le produit de 347 livres 13 ſols 6 deniers par 43; puiſque par le procédé que nous venons de ſuivre, nous avons multiplié toutes les parties du multiplicande par 43.

Les nombres 10 ſols, 2 ſols & 1 ſol, dans leſquels nous avons partagé 13 ſols, ſont ce qu'on appelle des parties *aliquotes* de la livre. Ce ſont, comme on l'a déja dit, des parties qui ſont contenues un nombre entier de fois dans leur unité. Ainſi 2 pouces 3 pouces ſont parties aliquotes de la toiſe, parce que ces parties ſont contenues un nombre de fois juſte dans leur unité qui eſt la toiſe. 4 pieds ne ſont pas parties aliquotes, parce que 4 pieds ne ſont pas contenus juſte dans la toiſe.

Propoſons-nous maintenant de multiplier:

Troiſiéme exemple.

	347^{liv}	13^{s}	6^{d}.
par	9 toiſes	5 pieds	9 pouces
	3129^{liv}	1^{s}	6^{d}.
Pour 3 pieds	173	16	9
Pour 2 pieds	115	17	10
Pour 6 pouces	28	19	5 $\frac{1}{2}$
Pour 3 pouces	14	9	8 $\frac{3}{4}$
	3462	4	5 $\frac{1}{4}$

Après avoir multiplié, comme dans les premiers exemples, toutes les parties du multiplicande par 9; on paſſe à la multiplication du même multiplicande par 5 pieds; & pour cela on partage 5 pieds en parties aliquotes de la toiſe, c'eſt-à-dire, en 3 pieds & 2 pieds, & l'on fera attention que ſi l'on avoit 347 livres 13 ſols 6 deniers à multiplier par une toiſe, on auroit pour le produit 347 livres 13 ſols 6 deniers; que par conſéquent 3 pieds, qui ne ſont que la moitié de la toiſe, ne doivent produire que la moitié de 347 livres 13 ſols 6 deniers, qui eſt 173 livres 16 ſols 9 deniers; d'où il ſuit encore que 2 pieds, qui ne ſont que le tiers de la toiſe, ne doivent produire que le tiers de 347 livres 13 ſols 6 deniers, qui eſt 115 livres 17 ſols

ſols 10 deniers. On paſſera enſuite aux 9 pouces, & l'on partagera 9 pouces en parties aliquotes du pied; c'eſt-à-dire, en 6 pouces & en 3 pouces, & l'on remarquera que puiſque 347 livres 13 ſols 6 deniers, multipliés par 2 pieds, donnent 115 livres 17 ſols 10 deniers, ſix pouces, qui ne ſont que le quart de deux pieds, ne produiront que le quart de 115 livres 17 ſols 10 deniers, qui eſt 28 livres 19 ſols 5 deniers $\frac{1}{2}$; que 3 pouces, qui ſont la moitié de 6 pouces, produiront la moitié de 28 livres 19 ſols 5 deniers $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, 14 livres 9 ſols 8 deniers $\frac{1}{4}$. Il n'eſt donc plus queſtion que de réunir tous ces produits, qui donneront pour le produit total 3462 livres 5 ſols 3 deniers $\frac{1}{4}$.

Enfin multiplions 347^{liv} 13^{s} 6^{d}

par 43^{toiſes} 5^{pieds} 9^{pouces}

	1041^{liv}		
	1388		
Pour 10 ſols	21	10	
Pour 2 ſols	4	6	
Pour 1 ſol	2	3	
Pour 6 deniers	1	1	6
Pour 3 pieds	173	16	9
Pour 2 pieds	115	17	10
Pour 6 pouces	28	19	5 $\frac{1}{2}$
Pour 3 pouces	14	9	8 $\frac{1}{4}$
	15283	4	3 $\frac{1}{4}$

On multipliera tout le multiplicande par 43 toiſes, préciſément comme on l'a fait dans le ſecond exemple, enſuite pour les 5 pieds & 9 pouces, on ſuivra mot à mot ce qui a été fait dans le dernier; & en réuniſſant tous ces produits, on trouvera pour produit total 15283 livres 4 ſols 3 deniers $\frac{1}{4}$.

Propoſons-nous encore un cinquiéme exemple.

Multiplier	48 marcs	0 once	1 gros	
par	39 ℔	10 ſ	2 d.	
	432 marcs			
	144			
Pr 1 once	4	7 onces		faux produit.
Pr 1 gros		4	7 gros	
Pr 10 ſols	24	0	0 $\frac{1}{2}$	
Pr 1 ſol	2	3	1 $\frac{13}{20}$	faux produit.
Pr 2 deniers		3	1 $\frac{7}{120}$	
	1897	0	1 $\frac{15}{120}$	

Dans cet exemple il ſeroit embarraſſant de prendre pour un gros, qui eſt la ſoixante-quatriéme partie d'un marc, la ſoixante-quatriéme partie de trente-neuf marcs. C'eſt pourquoi on ſuppoſe le produit le plus commode; c'eſt-à-dire, celui d'une once, duquel on prend la huitiéme partie, on barre ordinairement les chiffres de ce faux produit, qui ne doit point être compris dans

le produit total. On fera la même choſe pour les 2 deniers du multiplicateur.

De la Diviſion complexe.

Avant de faire une diviſion complexe, il faut examiner ſi le dividende & le diviſeur ſont de la même eſpéce ou non.

S'ils ſont de la même eſpéce, on réduit le dividende & le diviſeur en unités de la plus baſſe eſpéce, & enſuite on opere comme dans la diviſion des nombres incomplexes.

Premier exemple.

On veut diviſer	3858#	16ſ	6d.
par	49	14	7

Les unités de la plus baſſe eſpéce ſont des deniers; on réduit donc le dividende tout en deniers, & pour cela on multiplie d'abord 3858 livres par 20 pour avoir des ſols, en y joignant les 16 ſols du dividende, on a 77176 ſols, qu'il faudra multiplier par 12 pour avoir des deniers, & en y ajoutant 6 deniers, on aura 926118 deniers; faiſant la même choſe pour le diviſeur, il deviendra 11935 deniers. Alors il n'eſt plus queſtion que d'une diviſion incomplexe. Voici comment on doit diſpoſer tous les différens nombres qui entrent dans cette opération.

3858# 16ſ 6d.	49# 14ſ 7d.
20	20
77160	980
16	14
77176	994
12	12
154352	1988
77176	9947
6	11935#
926118d.	

Diviſant ces nombres incomplexes, on trouvera 77 $\frac{7123}{11935}$ pour le quotient.

Quand même le dividende ne renfermeroit que des livres, ſi le diviſeur renfermoit des ſols ou deniers, il faudroit auſſi réduire le dividende en unités de la plus baſſe eſpéce du diviſeur, *& vice verſa.*

Si le dividende & le diviſeur n'avoient pas des unités de la même eſpéce, on changeroit le diviſeur en un autre qui fut incomplexe; ce changement ne peut ſe faire qu'en multipliant le diviſeur, c'eſt pourquoi on aura ſoin de multiplier le dividende par les mêmes nombres, & alors on diviſera ſucceſſivement toutes les parties du nouveau dividende par le nouveau diviſeur. Prenons un exemple:

Diviſons 8587 toiſes 5 pieds 7 pouces
par 42 ℔ 5 ſ. 6 d.

Je commencerai par faire diſparoître les 6 deniers, & cela en multipliant tout le diviſeur par 2, parce que deux fois 6 deniers ſont 1 ſol, ce qui donnera 84 livres 11 ſols; je multiplierai le dividende auſſi par 2, ce qui donnera 17175 toiſes 5 pieds 2 pouces. Ainſi il eſt queſtion de diviſer 17175 toiſes 5 pieds 2 pouces par 84 livres 11 ſols; ce qui, comme on le ſçait, doit donner le même quotient que le dividende & le diviſeur ci-deſſus; mais comme le diviſeur eſt encore complexe, on le multipliera par 20, parce qu'il n'y a que ce nombre qui multiplié par 11 ſols, puiſſe donner un nombre de livres juſte; multipliant auſſi le dividende par le même nombre 20, on trouvera pour nouveau dividende & nouveau diviſeur.

343517 to. 1 pi. 4 po. } 1691 ℔
5317 } 203 to. 0 pi. 10 p. 674/1691.
244
6

1465 pieds
12

17584 pouces
674

Ayant fait la diviſion des toiſes, il reſte 244 toiſes dont on fait des pieds, en multipliant par 6 ; on aura ſoin d'y ajouter un pied qui eſt au dividende, & l'on aura 1465 pieds qu'il faudra diviſer par le même diviſeur 1691 livres ; on trouvera 10 pouces pour le quotient, ainſi on fera des pouces en multipliant par 12 ; ce qui donnera, en y joignant les 4 pouces du dividende, 17584 pouces, qui diviſé par 1691, donne 10 pouces pour le quotient, & 674 pour reſte ; enſorte que le quotient total ſera 203 toiſes 0 pieds 10 pouces $\frac{674}{1691}$.

Nous avons parlé dans l'Introduction à l'Analyſe des régles de Compagnie, de l'Elévation des puiſſances, & de l'Extraction des racines ; comme on n'a rien dit des régles d'Alliages & de celles de fauſſes Poſitions, nous allons indiquer la méthode qu'il faut ſuivre pour les exécuter.

De la régle d'Alliage.

La régle d'Alliage eſt une opération qui ſert à faire trouver une valeur moyenne entre celles de matieres de différentes eſpéces mêlées enſemble.

Le problême eſt déterminé, & il n'a qu'une ſolution, lorſqu'on connoît le nombre, la valeur des parties qui entrent dans l'alliage, & qu'il ſuffit de trouver les valeurs

des parties nouvelles de la choſe alliée.

La valeur des unités, ou parties nouvelles du corps compoſé, eſt-elle donnée, & demande-t-on ſeulement de déterminer combien on doit prendre de chacune des choſes qu'il faut mêler, le problême eſt plus embarraſſant, & il eſt indéterminé lorſque l'on a plus de deux ſortes de matieres à faire entrer dans le mêlange, & que l'on ne peut pas les réduire à deux eſpéces. Nous allons donner des exemples de ces différens cas.

Régle générale. Lorſque l'on connoît la valeur & le nombre des différentes matieres qui doivent compoſer le corps allié, & que l'on propoſe de déterminer la nature & la valeur de l'unité de ce corps. Il faut multiplier l'unité de chaque eſpéce par le nombre qui déſigne combien on prend de ces unités, on a par ce moyen autant de produits qu'il y a de choſes mêlées, on ajoute ces différens produits, & l'on diviſe leur ſomme par celle des unités des différentes matieres qui entrent dans le mêlange, le quotient eſt la valeur de l'unité du corps allié.

Premier exemple.

On veut mêler enſemble trois ſortes de vin de différens prix; ſçavoir, 35 pintes

à 10 ſols, 12 pintes à 14 ſols, & 7 pintes à 15 ſols : on demande à combien reviendra la pinte après le mêlange ? Je multiplie 35 par 10, ce qui donne 350 ſols pour premier produit ; je multiplie 12 par 14, ce qui donne 168 pour ſecond produit ; enfin pour avoir le troiſiéme produit, je multiplie 7 par 15, & l'on a 105 ; j'ajoute enſemble 350, 168 & 105, & je diviſe la ſomme 623 par 54, nombre des meſures de vin qui entrent dans le mêlange, le quotient $11+\frac{29}{54}$ eſt le prix du vin après le mêlange.

Second exemple.

Un Orfévre veut faire un alliage de 60 marcs avec de l'argent à différent titre ; ſçavoir, 32 marcs d'un argent à 11 deniers de fin, 20 marcs d'un autre argent à 11 deniers 12 grains de fin, & 8 marcs d'un troiſiéme argent à 10 deniers 12 grains de fin : on demande à quel titre ſera le mêlange. Pour réſoudre ce problême, il faut ſçavoir que les Orfévres diviſent le marc d'argent en douze parties égales, qu'ils nomment deniers, & qu'ils partagent le denier en 24 parties qu'ils nomment grains ; en partant de-là, on voit que l'argent eſt d'autant plus pur qu'il y entre moins d'alliage de corps étranger dans ſa ſubſtance. Pour dé-

terminer à quel denier eſt un argent donné, il ſuffit de connoître combien il y a de parties d'argent pur, & combien il y en a d'un autre métal; s'il a dix parties d'argent pur & deux d'alliage, on dit que l'argent eſt à dix deniers; s'il y a onze parties & demie d'argent, & une demi-partie d'alliage, on dit que l'argent eſt à 11 deniers 12 grains, &c.

Ceci connu, voici comme on procédera pour trouver la ſolution du problême, on commencera, comme ci-devant, par multiplier les 32 marcs par 11 deniers, ce qui donnera 352 deniers; on multipliera de même les 20 marcs par 11 deniers 12 grains, ce qui donnera pour ſecond produit 230; enfin multipliant 8 marcs par 10 deniers 12 grains, on aura 84 pour troiſiéme produit; la ſomme de ces trois produits ſera de 666 deniers, leſquels diviſés par 60, on aura pour la quantité d'argent fin contenu dans un marc de mêlange, 11 deniers 2 grains $\frac{2}{5}$; le titre de l'argent ſera par conſéquent à 11 deniers 2 grains $\frac{2}{5}$ de grains.

On a dû remarquer que dans la ſolution des problêmes précédens, on connoiſſoit le nombre & la valeur de chaque eſpéce de parties qu'on ſe propoſoit de mêler, & qu'il n'a été queſtion que de déterminer la valeur d'une des parties

du mêlange ; dans les problêmes ſuivans, on ne ſuppoſe de connu que le nombre total des parties du mêlange, la valeur de chaque eſpéce de parties, & la valeur total de ce mêlange, il faut trouver le nombre des parties de chaque eſpéce, on peut énoncer le problême de la maniere ſuivante.

Etant donné deux unités de valeurs différentes, trouver quelles parties il faut prendre de chacune pour avoir l'unité d'une valeur moyenne.

Pour réſoudre la queſtion, il faut former deux fractions, dont le dénominateur commun ſera égal à la différence de la plus haute valeur à la moindre, la premiere fraction aura pour numérateur la différence de la valeur moyenne à la plus baſſe, ce ſera la portion qu'il faudra prendre de l'unité de la plus grande valeur, le numérateur de la ſeconde fraction ſera égal à la différence de la valeur moyenne à la plus haute ; ce numérateur indiquera ce qu'il faut prendre de l'unité de la moindre valeur.

Premier exemple.

Un Marchand a du bled à 9 livres & à 14 livres le ſac ; on demande ce qu'il doit mêler de l'un & de l'autre pour,

avoir du bled à 12 livres le ſac ? Je prends la différence de 9 livres à 14 livres, laquelle eſt 5, c'eſt le dénominateur commun ; pour avoir le numérateur de la premiere fraction, je prends la différence de 9 à 12, laquelle eſt 3 ; la premiere fraction eſt donc $\frac{3}{5}$: je prends auſſi la différence de 12 à 14, laquelle eſt 2, c'eſt le numérateur de la ſeconde qui ſera $\frac{2}{5}$. Les numérateurs de ces fractions nous indiquent qu'il faut prendre trois meſures du bled le plus cher, & deux meſures de celui qui eſt à plus bas prix ; en effet, la différence 3 du plus bas prix au prix moyen étant les deux tiers de la différence 2 du prix le plus haut au prix moyen ; il eſt évident que chaque partie qu'on prendra du bled le moins cher pour compoſer le mêlange, diminuera le prix moyen d'une quantité égale aux deux tiers de celle dont chaque partie du bled le plus cher doit augmenter ce même prix moyen. On voit donc d'après cela que, pour augmenter le prix moyen du ſac par le bled le plus cher d'une quantité égale à celle dont il ſera diminué par le bled le moins cher, afin que le prix moyen ſoit tel qu'on le demande, il faut, comme on l'a dit, prendre trois parties du bled le plus cher, & deux parties de celui qui eſt au plus bas prix, pour avoir un mê-

lange convenable & tel qu'on le demande.

Second exemple.

Un Orfévre a deux ſortes d'argent, l'un à 11 deniers 18 grains, le ſecond à 10 deniers 12 grains; il en veut compoſer un marc au titre de 11 deniers de fin; combien doit-il prendre de l'un & de l'autre?

Faiſons comme ci-devant, deux fractions qui ayent pour dénominateur commun 30 grains, différence de l'argent au plus haut titre à l'argent du titre le plus bas; donnons pour numérateur à la premiere fraction 18, différence du titre de l'argent le plus haut à l'argent du titre moyen; & à la ſeconde fraction 12, différence du titre de l'argent le plus bas à celui du titre moyen, on aura les deux fractions $\frac{18}{30}$ & $\frac{12}{30}$, leſquelles indiqueront les parties du marc qu'il faudra prendre des différens argens qu'il faut allier; c'eſt à-dire, qu'on mêlera $\frac{3}{5}$ de marc de l'argent à 11 deniers 18 grains, $\frac{2}{5}$ de celui à 10 deniers 12 grains pour compoſer le marc à 11 deniers.

Des Régles de fauſſes Poſitions.

On donne le nom de régles de fauſſes Poſitions, à des opérations dans leſquelles on ſe propoſe de partager un nombre don-

né, ou une partie d'un nombre donné en parties proportionnelles, à celles d'un autre nombre pris à volonté.

On diſtingue deux ſortes de régles de fauſſes Poſitions, celle d'une fauſſe Poſition & celle de deux fauſſes Poſitions; dans celles de la premiere eſpéce on ne fait qu'une ſuppoſition de parties proportionnelles à celles dans leſquelles on doit partager le nombre propoſé.

Dans les régles de fauſſes Poſitions de la ſeconde eſpéce, il y a deux ſuppoſitions, toutes deux fauſſes, d'après leſquelles on conclut réellement les véritables parties du nombre qu'on veut diviſer.

Dans la régle d'une fauſſe Poſition on ſe propoſe de trouver un nombre qui dépend de certaines conditions: or on parvient à trouver ce nombre en en prenant un quelconque à volonté, & en examinant ſi le nombre qu'on a choiſi ſatisfait ou non aux conditions du problême, s'il ne remplit point les conditions, on parvient à la ſolution du problême en faiſant une ſimple régle de Proportion *: quelques exemples rendront ceci plus ſenſible.

* Régle de Proportion, régle de Trois, c'eſt une même choſe, c'eſt une opération dans laquelle trois nombres étant donnés, on ſe propoſe d'en trouver un quatriéme qui ait avec le troiſiéme le même rapport que le ſecond a avec le premier; ou, ſi l'on veut, qui ſoit contenu dans le troiſiéme

Exemple.

On propoſe de trouver un nombre dont la moitié, le tiers & le quart faſſent enſemble 78; je prends un nombre dont on peut avoir la moitié, le tiers & le quart, 36, *par exemple*, j'ajoute enſemble 18, 12, 9, qui ſont les parties demandées du nombre 36, leurs ſommes donnent 39; je dis enſuite ſi 39 contiennent la moitié, le tiers & le quart de 36, de quel nombre 78 contiendra-t-il la moitié, le tiers & le quart? Je multiplie 78 par 36, & je diviſe le produit 2808 par 39, je trouve 72 au quotient, ce nombre ſatisfait à la queſtion; en effet, 36, moitié de 72, 24, tiers du même nombre, & 18, qui en eſt le quart ajoutés enſemble, donnent 78.

Second exemple.

Un homme achete un bois, une mai-

de la même maniere que le ſecond l'eſt dans le premier.

Par exemple, trois hommes ont employé un certain temps à faire quatre toiſes d'ouvrage; on demande combien 6 hommes en feront dans le même temps? On écrit les trois nombres connus comme vous le voyez:

$$3^h : 4^t :: 6^h : x,$$

On multiplie 4 par 6, & l'on diviſe le produit 24 par 3, le quotient 8 eſt le quatriéme terme demandé, c'eſt-à-dire, la quantité de toiſes que feront les 6 hommes. Voyez la théorie des proportions dans l'Introduction à l'Analyſe.

ſon, un pré & une paire de bœufs, 20000 livres, avec les conditions ſuivantes: la valeur du pré eſt double de celle des bœufs, celle de la maiſon triple de celle du pré; enfin celle du bois ſix fois autant que celle de la maiſon. Soit le prix des bœufs = 100, celui du pré ſera 200, celui de la maiſon 600, enfin celui du bois 3600; mais ces ſommes réunies ne font que 4500*, au lieu qu'on devroit avoir 20000* ſi la ſuppoſition eût été exacte. Pour trouver le nombre que l'on cherche, on fera la proportion ſuivante:

4500 : 100 :: 20000 : 444 + $\frac{4}{9}$;

c'eſt le prix des bœufs.

Troiſiéme exemple.

Un pere en mourant partage ſon bien à ſes enfans, de maniere que l'aîné en a la moitié, le ſecond le tiers, le troiſiéme a 40000 livres; on demande quel eſt le bien du pere? En ſuppoſant ce bien = 1, la part de l'aîné ſera = $\frac{1}{2}$, la part du ſecond = $\frac{1}{3}$, ſi on retranche ces deux parts du bien total, le reſte ſera la part du troiſiéme: or pour faire cette ſouſtraction, il faut réduire les deux fractions au même dénominateur, c'eſt-à-dire, à $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, les ajouter enſemble, & retrancher leur ſomme $\frac{5}{6}$ du bien total qui eſt égal à $\frac{6}{6}$, il reſtera $\frac{1}{6}$, c'eſt la part du troiſiéme enfant.

Pour trouver le nombre qui exprime le bien du pere, on fera la régle de Proportion ſuivante.

$\frac{1}{6}$, part du plus jeune, eſt à $1 = \frac{6}{6}$, comme 40000 eſt à un quatriéme terme qui eſt le nombre demandé, faiſant l'opération on trouve que ce nombre eſt 240000; en ajoutant 40000 à la moitié & au tiers de ce nombre, on retrouve 240000.

Dans les régles de deux fauſſes Poſitions, il faut, ainſi que dans l'autre, choiſir un nombre à volonté, auquel on fera l'application des conditions du problême; ſi le nombre choiſi ne ſatisfait point à ces conditions, on examine ſi c'eſt par excès ou par défaut; on écrit à part cet excès ou ce défaut avec les ſignes $>$ ou $<$, qui ſervent à déſigner ces choſes; on prend enſuite un autre nombre ſur lequel on fait les mêmes tentatives, ſi ce nombre ne ſuffit point encore aux conditions demandées, on l'écrit ſous celui qu'on a eſſayé dans la premiere ſuppoſition, & on écrit à ſa droite, ainſi qu'à celle du premier nombre, les différences trouvées, en interpoſant entre chacun les ſignes d'excès ou de défaut qui leur conviennent. On conſidére enſuite ſi les ſignes qui répondent à ces différences, ſont ſemblables ou s'ils ſont diſſemblables; dans le premier

cas

cas on multiplie le nombre pris pour la premiere ſuppoſition par la ſeconde différence : on multiplie auſſi par cette même différence, le nombre adopté pour la ſeconde ſuppoſition ; on ſouſtrait ces produits l'un de l'autre, & l'on écrit le reſte à part, qu'on diviſe par le reſte de la ſouſtraction de la plus petite différence à la plus grande.

Les ſignes ſont-ils diſſemblables, on multiplie en croix les nombres de la premiere & de la ſeconde ſuppoſition ; le premier par la différence du ſecond, & celui-ci par la différence du premier : on fait une ſomme des deux produits que l'on diviſe par la ſomme des différences, le quotient eſt le nombre demandé, celui qui doit ſatisfaire aux conditions du problême.

Exemple du premier cas.

On veut partager une ſomme de louis à trois perſonnes, de maniere que la premiere & la ſeconde en ayent enſemble 60, la ſeconde & la troiſiéme 120, & la premiere & la troiſiéme 100 ; on demande combien il y a de louis, & ce qu'il en revient à chaque perſonne. Suppoſons qu'il doive en revenir 10 à celle qui doit en avoir moins d'après la premiere condition ; la ſeconde en aura 50 & la troi-

ſiéme 70 : mais, ſuivant la derniere condition du problême, il en doit revenir 100 à la premiere & à la troiſiéme, cependant on n'en trouve que 80 pour les deux, il y a donc 20 de défaut, que j'écris comme vous le voyez : 10 > 20.

Suppoſons maintenant que le premier doive en avoir 15, le ſecond, dans cette hypothèſe, en aura 45, il en reviendra par conſéquent 75 au troiſiéme ; mais la part du premier, jointe à celle du troiſiéme, donnent 90, ſomme plus petite de 10 que celle qu'on doit avoir. J'écris le nombre 15 de la ſeconde ſuppoſition ſous le nombre de la premiere, comme on le voit :

10 > 20
15 > 10,

& à côté ſa différence 10, en interpoſant entre le ſigne de défaut qui convient dans cette circonſtance. Comme les ſignes ſont ſemblables, on multipliera, ainſi que la régle le preſcrit, le nombre 10 de la premiere ſuppoſition par la différence 10 qu'on a eue de la ſeconde ſuppoſition, on aura 100 au produit ; on multipliera pareillement le nombre 15 de la ſeconde ſuppoſition par la différence 20 qu'on a eue de la premiere, l'on aura 300 pour produit : ces deux produits ſouſtraits l'un de

l'autre, on écrit à part le reſte 200, qu'on diviſera par 10, que donnera la ſouſtraction des deux différences, on aura 20 au quotient; c'eſt ce qui revient au premier de ceux qui doivent partager les louis, le ſecond en aura 40, & le troiſiéme 80; il y avoit 140 louis à répartir.

Exemple du ſecond cas.

Trois perſonnes ont enſemble 150 ans, leurs âges ſont tels que la ſeconde a 6 ans de plus que la premiere, & la troiſiéme 9 ans de plus que la ſomme des âges des deux autres; quel eſt l'âge de chacune?

Suppoſons 8 ans à la plus jeune, la ſeconde en aura 14, & la troiſiéme 31: or ces trois âges réunis ne donnent que 53 ans, & ils ſont ſuppoſés égaux à 150 ans; je prends la différence de 53 à 150, laquelle eſt de 97 ans, que j'écris à côté du nombre 8, en plaçant entre le ſigne de défaut comme on le voit: $8 > 97$.

Je ſuppoſe en ſecond lieu que l'âge de la plus jeune eſt de 36 ans, d'après cette ſuppoſition celui de la ſeconde ſera 42 ans; la troiſiéme aura 87 ans, or ces trois âges réunis donnent 165 ans, qui excédent de 15 ans les 150 ans qu'on ſuppoſe aux trois perſonnes; j'écris le nombre 36 ſous 8, & la différence 15 à

ſa droite, en mettant entre-deux le ſigne d'excès, les nombres étant diſpoſés de la maniere qu'on les voit ici :

$$8 > 97$$
$$36 < 15.$$

Je multiplie, comme la régle le preſcrit, le nombre 8 par 15; ce qui donne le produit 120: je multiplie de même 36 par 97, j'ai pour produit 3492; j'ajoute ces deux produits, ce qui fait 3612; je diviſe ce nombre par 112, ſomme des différences 97 & 15. Le quotient 32 ans 3 mois eſt l'âge de la plus jeune perſonne.

Je ne m'étendrai point davantage ſur ces opérations; ſi on en a bien ſaiſi le principe, on réſoudra aiſément les différens problêmes que l'on peut propoſer ſur les régles de fauſſes Poſitions, tant ſimples que compoſées; mais ceux qui voudront ſe rendre familiers les principes d'Algébre de notre Introduction, verront avec combien de facilité on réſout ces problêmes, & ſans aucun tâtonnement. Il y a d'autres opérations, telles que celles du cent, celles d'intérêts ſimples, & d'intérêts d'intérêts, qu'on trouve dans les Livres des Arithméticiens. Nous n'en dirons rien, parce qu'elles ne ſont pas directement de notre objet, & que ce petit Traité va déja

au-delà des bornes d'un Abrégé élémentaire. Nous croyons rendre ſervice à ceux qui veulent s'appliquer à l'Arithmétique du Commerce, de leur indiquer les différens Ouvrages que M. Deliſle *, de l'Académie Royale d'Ecriture, a donné au Public ; ils ſont très-méthodiques & très-clairs. On pourra auſſi conſulter les Traités de le Gendre & de Barême, qui ſont eſtimés des Commerçans.

* Cet Auteur demeure rue S. Jacques, vis-à-vis celle du Plâtre, chez M. Jon, de la même Académie, qui tient Claſſe d'Ecriture, & prend des Penſionnaires.

Explication de la Table ci-jointe.

Cette Table eſt partagée en pluſieurs eſpaces parallèles, leſquels contiennent chacune, indépendamment des chiffres mis en gros caractere, deux rangs de chiffres plus petits; ſi on regarde les chiffres les plus gros comme multiplicateurs, chacun de ceux du rang ſupérieur de chaque eſpace ſera le multiplicande; le produit ſe trouvera immédiatement deſſous ce multiplicande dans le rang inférieur.

Uſage de cette Table pour la Multiplication.

Veut-on le produit de 9 par 7, je cherche l'eſpace parallèle qui a en gros caractere en tête le chiffre 9, & dans le rang inférieur de cet eſpace, on trouve deſſous 7 le produit 63.

Demande-t-on ce que valent 18 fois 16, je cherche l'eſpace qui a en tête 18, & je trouve au ſecond rang 238 ſous le nombre 16; c'eſt le produit de ces deux nombres.

Uſage de cette Table pour la Diviſion.

En conſidérant chaque chiffre ou aſſemblage particulier de chiffres du ſecond rang, comme autant de dividendes, & ceux du rang ſupérieur comme des diviſeurs correſpondans, le chiffre écrit en tête de chaque rang, ſera le quotient cherché.

Veut-on, par exemple, diviſer 72 par 8, je cherche l'eſpace parallèle dans lequel on trouve 72 placé au ſecond rang au-deſſous de 8, le chiffre écrit en tête en gros caractere, eſt le quotient demandé; ici c'eſt 8.

Uſage de cette Table pour avoir les quarrés des chiffres écrits en gros caractere.

Prenez dans chacun des ſeconds rangs les produits correſpondans aux chiffres ſemblables à ceux qui ſont en tête; ces produits ſont les quarrés requis. Veut-on avoir le quarré de 10, je prends dans le ſecond rang le produit qui ſe trouve ſous 10; c'eſt 100 qui eſt le quarré de 10.

Uſage de la Table pour avoir la racine quarrée.

Veut-on la racine quarrée de 100, je cherche un eſpace parallèle qui contienne,

1°. 100 au ſecond rang, & 2°. qui a au-deſſus de 100 un nombre égal à celui qui eſt écrit en gros caractere au commencement de cet eſpace ; 10 eſt le nombre écrit au-deſſus de 100, je trouve en tête 10; c'eſt la racine quarrée qu'on veut avoir.

Fin de l'Arithmétique.

INTRODUCTION

la Multiplication

1

2 2 4

3 2 3 6, 9.

4 2 3 4 8, 12, 16.

5 2 3 4 5 10, 15, 20, 25.

6 2 3 4 5 6 12, 18, 24, 30, 36.

7 2 3 4 5 6 7 14, 21, 28, 35, 42, 49.

8 2 3 4 5 6 7 8 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64

9 2 3 4 5 6 7 8 9 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81

2 3 4 5 6 7 8 9 10 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 4, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 89, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, 143, 156, 169

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 , 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182, 196.

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 195, 210, 225.

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 , 80, 96, 112, 128, 144 160, 176, 192, 208, 224, 240, 256.

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255, 272, 289.

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 108, 126, 144, 162, 180, 198, 210, 234, 252, 270, 288, 306, 324.

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 14, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 304 323 342 361.

7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 , 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360, 380, 400.

BIBLIOTECA NAPOLI

INTRODUCTION
A L'ANALYSE PRATIQUE.

PREMIERE PARTIE.

Principes d'Algébre.

ON ne s'eſt point propoſé de donner ici un traité complet d'Algébre, mais ſeulement de rappeller en peu de mots les premiers principes de cette ſcience, ceux qui ſont abſolument néceſſaires pour arriver à la ſolution des problêmes contenus dans cette Analyſe pratique. Les opérations préliminaires à l'Analyſe ſont les Réductions, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion, les Fractions, l'élévation aux Puiſſances, l'extraction des Racines, le calcul des Radicaux, & la préparation des Equations.

Toutes les grandeurs ſur leſquelles on opere en Algébre, étant des quantités

indéterminées, il a fallu imaginer des moyens propres à exprimer les différentes opérations à faire ſur ces grandeurs; pour déſigner ces quantités indéterminées, on eſt convenu d'employer les lettres de l'alphabet comme des caracteres avec leſquels nous ſommes familiariſés dès l'enfance, & il a été reçu qu'on déſigneroit les quantités connues par les premieres lettres juſqu'à l'*m* incluſivement, & de ſe ſervir des dernieres pour dénoter les inconnues; les caracteres de l'alphabet ſeuls n'euſſent pas ſuffi pour exprimer la marche & le réſultat des opérations, les nombres ſe fondent les uns avec les autres; & l'on en trouve qui expriment la ſomme, la différence, le produit, le quotient de pluſieurs autres; il n'en eſt pas de même des lettres, on n'en trouve point qui déſigne la ſomme de deux ou de pluſieurs autres, c'eſt pour y ſuppléer qu'on a imaginé les ſignes ſuivans, & qu'il a été reçu parmi les Algébriſtes que $+$ vaut *plus*, $-$ vaut *moins*, $=$ ſignifie *égal à*, $\times$ *multiplié par*, $>$ *plus grand que*, $<$ *plus petit que*, $\sqrt{\ }$ *racine*; ainſi, $a+b$ veut dire a plus b, $a-b$ ſignifie a moins b; $a=b$, a égal à b; $a>b$, a plus grand que b; $a<b$, a plus petit que b, $a\times b$ ou ab, a multiplié par b; $\frac{a}{b}$, a diviſé

par b; $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^3}$, ſignifie racine quarrée ou racine cubique de a.

On nomme *coëfficient*, un chiffre écrit à la gauche d'un terme algébrique ; ce chiffre indique que la quantité qu'il précéde, devroit être répétée autant de fois qu'il contient d'unités. Un chiffre écrit à la droite d'une lettre, & un peu au-deſſus, ſe nomme *expoſant*, il indique la multiplication. Il faut obſerver que l'expoſant n'appartient qu'à la lettre au-deſſus de laquelle il eſt écrit; ainſi dans le terme ab^4, l'expoſant 4 appartient ſeulement à la lettre b, & il déſigne que la lettre a eſt multiplié par la quatriéme puiſſance de b.

Les grandeurs ſur leſquelles on opere en Algébre ſont ou poſitives ou négatives ; les poſitives ſont précédées du ſigne $+$, exprimé ou ſous-entendu; les grandeurs négatives ſont toujours précédées du ſigne $-$: on diſtingue encore les grandeurs algébriques en complexes & en incomplexes ; les grandeurs complexes renferment pluſieurs termes ſéparés par les ſignes $+$ ou $-$ ſeulement; par exemple, $3a^2+4b^3-2c^4$ eſt une grandeur complexe. La grandeur incomplexe n'a qu'un terme formé d'une lettre, & quelquefois de pluſieurs lettres miſes l'une à côté de l'autre ſans aucun ſigne. Les grandeurs in-

complexes qui ſont compoſées des mêmes lettres avec le même expoſant aux coëfficiens & aux ſignes + ou — près, ſont appellés grandeurs ſemblables; au contraire elles ſont diſſemblables, ſi étant compoſées des mêmes lettres, elles n'ont point ces conditions. Une grandeur algébrique ſe nomme *monome* ſi elle n'a qu'un terme, *binome* ſi elle en a deux, *trinome* ſi elle en a trois, & *polynome* ſi elle en a davantage.

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES.

De l'Addition.

Ajouter des grandeurs, c'eſt les joindre enſemble pour en trouver un réſultat qu'on nomme *ſomme*; ainſi pour ajouter $+7a-5a+4a$, on prend la ſomme des coëfficiens des quantités poſitives, & on retranche de cette ſomme le coëfficient de la quantité négative, l'addition & la réduction faite, il reſte $6a$; lorſque les grandeurs ſont diſſemblables, on les écrit les unes à la ſuite des autres, en interpoſant entr'elles les ſignes qui les précédoient avant l'opération.

De la Souſtraction.

Souſtraire une grandeur d'une autre, c'eſt trouver celle qui étant ajoutée à la pre-

miere, fait une ſomme égale à la ſeconde. La grandeur à trouver ſe nomme *reſte* ou *différence*. Souſtraire $4a$ de $9a$, c'eſt trouver $5a$; en effet, $5a$ ajouté à $4a$, donnent la quantité $+9a$; $5a$ exprime donc la différence des deux grandeurs $9a$ & $4a$. Pour faire une ſouſtraction algébrique, il faut, avant l'opération, changer les ſignes de la quantité à ſouſtraire; les *plus* en *moins*, & les *moins* en *plus*; d'après cela on voit que la ſouſtraction algébrique devient quelquefois une vraie addition : cela vient de ce que ſouſtraire une quantité négative, c'eſt ſubſtituer à ſa place une quantité oppoſée, c'eſt-à-dire, une quantité poſitive. Si les quantités ſur leſquelles on veut opérer, ne ſont pas ſemblables, après avoir changé les ſignes de la quantité à ſouſtraire, on écrit cette quantité à la ſuite de celle dont on devoit la ſouſtraire.

De la Multiplication.

Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt trouver une troiſiéme grandeur qui ſoit à la premiere, ce que la ſeconde eſt à l'unité; on nomme la premiere grandeur, *multiplicande*; la ſeconde, *multiplicateur*, & celle qu'il faut trouver, *produit*; on ſe contente quelquefois d'indiquer la

multiplication, & l'on exprime le produit d'une grandeur a multipliée par une grandeur b, en écrivant ab ou $a \times b$. Lorſque l'on a à multiplier des polynomes, on tire au-deſſus de chacun des polynomes, un trait qui indique les quantités à multiplier, comme on le voit dans cet exemple, $\overline{ab+ed-ef} \times \overline{gh+il+mn}$, ou de la maniere ſuivante : $(ab+ed-ef)(gh+il+mn)$. Dans la multiplication algébrique, il y a quatre choſes à obſerver; la régle des ſignes, celle des coëfficiens, celle des lettres, & celle des expoſans.

La régle des ſignes demande que l'on écrive le ſigne *plus* avant le produit des quantités à multiplier, lorſque ces quantités ont l'une & l'autre le ſigne *plus* ou le ſigne *moins*, & que l'on mette avant ces produits le ſigne *moins*, ſi les quantités à multiplier ont des ſignes différens : les coëfficiens ſe multiplient comme les nombres ordinaires; la régle des lettres, qu'on les ordonne ſuivant le rang qu'elles occupent dans l'alphabet lorſqu'elles ne ſont élevées à aucune puiſſance; enfin, la régle des expoſans veut que l'on donne à chaque lettre un expoſant égal à la ſomme des expoſans du multiplicande & du multiplicateur, lorſque les termes du multiplicande & ceux du mul-

tiplicateur ſont compoſés des mêmes lettres.

Soit propoſé de multiplier

$$4a^2 + 5b^3$$

par

$$3a^4 - 2b^4$$

$$+12a^6 + 15a^4b^3$$
$$- 8a^2b^4 - 10b^7$$

$$+12a^6 + 15a^4b^3 - 8a^2b^4 - 10b^7.$$

De la Diviſion.

Diviſer une grandeur par une autre, c'eſt trouver une troiſiéme grandeur qui ſoit à l'unité ce que la premiere eſt à la ſeconde. La premiere ſe nomme *dividende*, la ſeconde *diviſeur*, & la troiſiéme *le quotient.*

On obſerve dans la diviſion les mêmes régles que dans la multiplication; c'eſt-à-dire, que les ſignes ſemblables donnent *plus* au quotient, & les ſignes différens donnent *moins*; les coëfficiens ſe diviſent comme les nombres ordinaires, les lettres communes au dividende & au diviſeur s'effacent en même nombre, & l'on écrit le reſte au quotient, à côté du quotient des coëfficiens; enfin, on ſouſtrait les expoſans du diviſeur des expoſans du dividende, lorſ-

que les quantités, tant du dividende que du diviſeur ont des lettres ſemblables affectées d'expoſans ; & l'on écrit au quotient le reſte de la ſouſtraction.

Exemple.

$$\begin{array}{r|l} 12a^6 + 15a^4b^3 - 8a^2b^4 - 10b^7 & 4a^2 + 5b^3 \\ \hline -12a^6 - 15a^4b^3 & 3a^4 - 2b^4 \\ 0 \quad 0 \quad -8a^2b^4 - 10b^7 & \\ +8a^2b^4 + 10b^7 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

Des Fractions.

Une fraction peut être regardée comme le quotient du numérateur diviſé par le dénominateur ; on fait ſur les fractions les mêmes opérations que ſur les nombres entiers ; mais il eſt encore des opérations préparatoires qui leur ſont propres, telles que la réduction à de moindres termes, & la réduction au même dénominateur.

La réduction à de moindres termes ſe fait en diviſant, lorſque cela eſt poſſible, le numérateur & le dénominateur par une même quantité, & conſiſte à effacer dans les deux termes les mêmes facteurs, la grandeur $\frac{8aabb}{14aab}$ traitée comme je viens de le dire, donne pour réſultat la fraction $\frac{4}{7}b$, la grandeur $\frac{7c^3d^3}{9c^2d^2} = \frac{7}{9}cd$.

La réduction au même dénominateur ſe fait en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des autres dénominateurs ; les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; réduites au même dénominateur deviennent les ſuivantes $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$. Ces fractions ainſi réduites, ſi on en demande la ſomme, on la trouvera, en joignant les trois numérateurs, en interpoſant entre chacun le ſigne *plus*, & en écrivant ſous le réſultat le dénominateur, comme vous le voyez dans cet exemple :

$$\frac{adf+bef+bde}{bdf}.$$

Pour ſouſtraire une fraction d'une autre, il faut les réduire au même dénominateur ſi elles n'y ſont pas ; ſouſtraire enſuite le plus petit numérateur du plus grand, & écrire ſous le reſte le dénominateur commun.

Exemple.

$\frac{c}{d}$ ſouſtraite de $\frac{a}{b}$ donne $\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-be}{bd}$.

Dans la multiplication des fractions on peut, ſi l'on veut, commencer l'opé-

ration par la réduction au même dénominateur, multiplier enſuite les numérateurs des fractions réduites, & écrire deſſous le produit celui des dénominateurs :

Exemple.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \times \frac{bc}{bd} = \frac{adbc}{bbdd}$, & réduiſant $\frac{ac}{bd}$, ce qui revient à la même choſe que ſi on avoit ſans réduction multiplié les deux numérateurs, & écrit deſſous le produit des dénominateurs.

Pour diviſer une fraction par une fraction, on aura le même quotient, ſoit que l'on réduiſe les fractions au même dénominateur, & qu'on multiplie enſuite le numérateur de la premiere fraction réduite par le dénominateur de la ſeconde, & le numérateur de celle-ci par le dénominateur de la premiere, en obſervant d'effacer les quantités qui ſe détruiſent, ou bien, ſans recourir à la réduction, en multipliant le numérateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde, & le numérateur de celle-ci par le dénominateur de la premiere.

Exemple.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \times \frac{bc}{bd} = \frac{abdd}{bbcc} = \frac{ad}{bc}$; ce qui revient au même qu'en faiſant la ſim-

ple multiplication en croix des deux fractions.

Indépendamment des fractions ordinaires, il eſt encore des *fractions de fractions*, c'eſt le nom que l'on donne à une ou pluſieurs parties d'une fraction ; on range dans cette claſſe les *fractions décimales*, ces ſortes de fractions ont pour dénominateurs les nombres 10, 100, 1000, 10000, &c. on n'écrit jamais leur dénominateur, parce que l'on ſçait qu'il eſt égal à l'unité ſuivie d'autant de zéros que ce dénominateur contient de chiffres ; on ſépare les entiers, quand il y en a, par une virgule ; ainſi, par exemple, l'expreſſion 4,24 ſignifie 4 entiers & $\frac{24}{100}$. On met aſſez ordinairement un zéro à la place des entiers avant la virgule, les fractions décimales repréſentant des entiers par la forme qu'on leur donne, leur calcul doit ſe faire comme celui des entiers, en obſervant de ſéparer, après l'opération, les entiers des fractions : les exemples ſuivans feront voir comment on doit ſe comporter dans la maniere d'opérer.

Pour faire l'addition des fractions décimales, on écrira ces quantités les unes ſous les autres, en obſervant de leur faire garder le rang de leur valeur, & d'écrire les dixiémes ſous les dixiémes, les cen-

tiémes ſous les centiémes, &c. cet ordre établi, on fera l'addition comme dans les nombres ordinaires. Si les fractions décimales étoient accompagnées d'entiers comme dans l'exemple ſuivant, on les écriroit comme vous le voyez, & l'on ſépareroit les entiers des fractions par une virgule :

3,24
5,328
2,448
11,016

Dans la ſouſtraction, après avoir ordonné les quantités, on opérera comme dans la ſouſtraction des nombres ordinaires. L'exemple ſuivant montrera la route qu'il faut ſuivre :

de 8,76964
il faut ôter .. 6,97437
il reſte .. 1,79527

Dans la multiplication, après avoir ordonné le multiplicande & le multiplicateur, on conſidérera l'un & l'autre comme des nombres entiers, on en fera la multiplication à l'ordinaire, & l'on ſéparera par une virgule du produit total autant de chiffres ſur la droite qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le mul-

tiplicateur. Voyez l'exemple ſuivant:

```
      4,286
      3,463
  ------------
      12858
    257160
  1714400
12858000
------------
14,842418
```

Les deux chiffres qui ſont à la gauche de la virgule, ſont des entiers.

Dans la diviſion ayant écrit la fraction diviſeur à côté de la fraction dividende, on diviſera ces deux quantités l'une par l'autre, & l'on ſépare du quotient après l'opération, autant de chiffres ſur la droite qu'il y a plus de décimales dans le dividende que dans le diviſeur. C'eſt ce qu'on remarquera dans cet exemple:

```
14,842418 | 4,286
----------+-------
12858     | 3,463
01984
 17144
 027001
   25716
   012858
    12858
    00000
```

Pour convertir une fraction ordinaire en une fraction décimale dont le dénominateur eſt donné, on ajoute au numérateur un nombre de zéro égal à celui que contient le dénominateur de la fraction décimale, & l'on diviſe ce numérateur ainſi transformé par le dénominateur qu'avoit la fraction avant la transformation : ainſi, par exemple, pour changer la fraction $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ en une fraction décimale qui ait 100 pour dénominateur, on multipliera le numérateur 1 par 100, & l'on diviſera le produit 100 par le dénominateur 5, on aura le quotient 20 ; la fraction ſera donc égale à la fraction $\frac{20}{100} = 0,20$.

Si l'on vouloit réduire une fraction décimale en une fraction ordinaire, dont le dénominateur fût connu, on multiplieroit le numérateur de la décimale par le dénominateur donné, & l'on diviſeroit le produit par le dénominateur de la décimale ; ce qui ſe feroit aiſément, en ſéparant du produit autant de chiffres que le dénominateur de la décimale eſt ſuppoſé en avoir, & en négligeant le ſurplus s'il y en a : par exemple, ſi on avoit a convertir la fraction décimale 0, 69, en une fraction ordinaire dont le dénominateur donné fût 4, on multiplieroit la fraction 0, 69 par 4, & du produit 276,

on retrancheroit les deux derniers chiffres, & l'on écriroit le dénominateur 4 ſous le chiffre reſtant 2, enſorte que la fraction 0, 69 ſe trouveroit transformée en la fraction ordinaire $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; ſi le dénominateur n'étoit point déterminé, on diviſeroit les deux termes de la fraction décimale par leur plus grand commun diviſeur; c'eſt-à-dire, par le nombre qui diviſeroit les deux termes ſans reſte, le quotient ſeroit la fraction ordinaire demandée. *Exemple.* La fraction $0,65 = \frac{65}{100}$ étant réduite deviendroit $\frac{13}{20}$.

Des rapports & des proportions.

On nomme *rapport*, le réſultat de la comparaiſon de deux grandeurs; le premier terme du rapport ſe nomme *antécédent*, & le ſecond terme *conſéquent*. On peut comparer les grandeurs de deux manieres différentes, en cherchant, 1°. de combien l'une ſurpaſſe l'autre; ou, 2°. voyant combien de fois l'une contient l'autre. Ces deux moyens de comparaiſon nous donnent deux rapports, le rapport arithmétique & le rapport géométrique; dans le rapport arithmétique on cherche à trouver la différence de deux grandeurs, le rapport arithmétique de 8 à 2 eſt 6; dans le rapport géométrique, au contraire, on di-

viſe l'un des termes par l'autre, pour trouver de quelle maniere l'un contient l'autre; le rapport géométrique de 8 à 2 eſt 4. Deux rapports arithmétiques ſont égaux lorſqu'ils ont des différences égales; dans ce cas ils peuvent former une proportion; la proportion eſt continue, lorſque le conſéquent du premier rapport ſert d'antécédent au ſecond rapport: on déduit d'une proportion arithmétique en général les propriétés ſuivantes:

1°. La ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens.

2°. Si la proportion eſt continue, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen terme. 3°. Dans une proportion compoſée de plus de quatre termes, (on lui donne alors le nom de progreſſion) la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des termes moyens également éloignés des extrêmes. 4°. Dans une progreſſion arithmétique, le dernier terme eſt égal au premier, plus autant de fois la différence qu'il y a de terme, moins un; de ces principes on tirera les conſéquences ſuivantes.

Puiſque dans toute progreſſion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens, ou au double du moyen, quand la proportion n'a que trois termes, il ſuit que ſi on a deux ou trois termes d'une

d'une proportion arithmétique, on trouvera celui qui manque, en ajoutant les deux extrêmes ou les deux moyens connus, & en retranchant de cette ſomme le troiſiéme terme donné.

Soit donnée la proportion arithmétique $a.a+d:b.b+d$: ſi l'on fait la ſomme des extrêmes & celle des moyens, on aura deux ſommes égales, c'eſt-à-dire, $a+b+d=a+b+d$; donc ſi dans cette proportion on connoît les trois termes a, b, $b+d$, on trouvera le terme moyen qui manque, en ajoutant le premier a avec le dernier $b+d$, & en retranchant de cette ſomme le moyen connu b; en effet, $a+b+d-b=a+d$, qui eſt le terme que l'on cherchoit; ſi l'on demandoit un des extrêmes, & que l'on eût, par exemple, le premier & les deux moyens, c'eſt-à-dire:

$a.a+d.b$, on auroit l'extrême demandé, en ajoutant les deux moyens, & en retranchant de cette ſomme l'extrême connu; en effet, ſi de $a+d+b$ on retranche a, on aura pour reſte $b+d$, c'eſt l'extrême cherché, en ſuppoſant que la proportion ne dût avoir que trois termes, & que l'on connût le premier & le troiſiéme, on mettroit x à la place du terme inconnu, & on raiſonneroit ainſi: puiſque dans une proportion arithmétique conti-

nue, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen; en ſuppoſant le premier terme $= a$, le troiſiéme $= b$, le terme moyen $= x$, on aura la proportion $a.x:x.b$, par conſéquent $a+b=2x$, & enfin $\frac{a+b}{2}=x$; ce qui fait voir qu'en prenant la moitié de la ſomme des extrêmes connus, on a le moyen demandé, une progreſſion arithmétique pouvant être repréſentée par la formule:

$\div a.a\pm d.a\pm 2d.a\pm 3d\ a\pm 4d.a\pm 5d.a\pm 6d$, &c.

On verra que le dernier terme $a\pm 6d=$ au premier terme a, plus autant de fois la différence d qu'il y a de terme avant lui; en effet, le dernier terme $a\pm 6d$ eſt le ſeptiéme de la progreſſion, en multipliant la différence d par 6, nombre des termes qui le précédent, & ajoutant à ce produit le premier terme a, on a $a\pm 6d$.

Dans le rapport géométrique, on diviſe l'un des termes par l'autre, pour voir de quelle maniere le premier contient le ſecond. Lorſque des rapports ſont tels que leurs antécédens, contiennent de la même maniere leurs conſéquens; ces rapports ſont égaux, & l'on peut en former une proportion géométrique: ſi, par exemple, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on en peut conclure que $a:b::$

$c:d$ (c'eſt ainſi qu'on écrit une proportion géométrique); les deux points qui ſéparent les termes du premier rapport, ainſi que ceux qui ſéparent ceux du ſecond rapport, ſignifient *eſt à*, les quatre points qui ſéparent les deux rapports, ſignifient *comme*, ainſi la proportion $a:b::c:d$ ſe traduit ainſi: a eſt à b comme c eſt à d. La propriété eſſentielle des proportions géométriques conſiſte en ce que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, c'eſt-à-dire, que ſi $a:b::c:d$, on en peut conclure que $ad=bc$; ce qui ſe démontre ainſi: puiſque, hypothèſe, $a:b::c:d$, ſi je multiplie les deux termes a & b du premier rapport par d, j'aurai le nouveau rapport $ad:bd$, qui eſt équivalent au premier, puiſque des grandeurs qui ont entr'elles un certain rapport, le conſervent ce rapport, ſoit qu'on multiplie ou que l'on diviſe par une même quantité ces grandeurs; il en ſera de même des termes c & d du ſecond rapport, ſi on les multiplie l'un & l'autre par la quantité b; car on aura $bc:bd$, rapport égal à celui de $c:d$, ces deux rapports compoſés donneront la proportion $ad:bd::bc:bd$; or, faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura $adbd=bdbc$; diviſant ces deux produits par la quantité bd, il reſtera

$ad = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Une proportion géométrique eſt ſuſceptible d'un nombre de variation ſans être altérée; en effet, de ce que $a:b::c:d$, on en peut conclure, *invertendo*, que $b:a::d:c$, *alternando*, que $a:c::b:d$; *addendo* ou *componendo*, que $a+c:c::b+d:d$; *ſubſtrahendo* ou *dividendo*, que $a-c:c::b-d:d$, on en conclura auſſi que la ſomme des antécédens eſt à la ſomme de leurs conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent; c'eſt-à-dire, que $a+c:b+d::a:b$; tous ces exemples deviendront plus ſenſibles, ſi on ſubſtitue des nombres aux lettres.

On nomme proportion continue géométrique, celle dans laquelle le ſecond terme ſert de conſéquent au premier rapport, & d'antécédent au ſecond; d'après cette définition, l'on voit que dans une telle proportion, le produit des extrêmes eſt égal au produit du terme moyen, multiplié par lui-même; &, comme on eſt convenu de nommer quarré le produit qui réſulte d'une grandeur quelconque, multiplié par elle-même, on voit que dans une proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen terme. Ce qu'on vient de dire, nous conduit à la ſolution d'un problême des plus intéreſſans; je veux par-

ler de la régle de Trois, on la nomme ainſi, parce que l'on ſe propoſe de trouver un quatriéme terme qui ſoit en proportion géométrique, avec trois termes donnés. La régle de Trois eſt directe ou inverſe : dans la régle de Trois directe, le premier terme eſt au ſecond ce que le troiſiéme eſt au quatriéme. Il y en a de deux eſpéces ; l'une ſimple, & l'autre compoſée. Dans la régle de Trois directe ſimple on multiplie les deux extrêmes ou les deux moyens connus, & l'on diviſe le produit par le moyen ou par l'extrême, qui eſt le troiſiéme terme donné, le quotient eſt le terme demandé.

Si la régle de Trois directe eſt compoſée, on la réduit à une régle de Trois ſimple, en obſervant d'écrire dans une même colonne tous les termes qui compoſent chaque cauſe, & d'ordonner de la même maniere ceux qui compoſent les effets ; cela poſé, on multiplie ſéparément tous les nombres qui compoſent les colonnes ordonnées, & chaque produit devient un terme ſimple, & la régle ſe réduit à trois termes, ſur leſquels on opere, comme je l'ai dit, pour la régle de Trois ſimple ordinaire.

Un exemple rendra ceci plus ſenſible : ſuppoſons que 12 hommes ont employé 10 jours à faire 4 toiſes 4 pieds ; on demande combien 16 hommes en feront en

14 jours; on diſpoſera la régle de la maniere ſuivante:

12 hommes	:	4 toiſes	:	16 hommes	
10 jours	:	4 pieds	:	14 jours	
120	:	16	::	224	: $x = 29 + \frac{13}{15}$.

La régle de Trois inverſe eſt ſimple ou compoſée. La régle de Trois inverſe ſimple eſt celle dans laquelle on connoît trois termes, dont deux ſont les extrêmes, & le troiſiéme le moyen. Cette inverſion n'a lieu que parce que l'on ne place pas le troiſiéme terme comme il doit l'être; l'on éviteroit cet embarras, ſi au lieu d'écrire les trois termes de ſuite, on mettoit à la place du troiſiéme quelque ſigne, une lettre, par exemple, qui indiquât que l'on cherche le terme qui doit être à la place de cette lettre; éclairciſſons ceci par un exemple.

16 ouvriers ſont 6 jours à faire un ouvrage, on demande combien 8 ouvriers employeront de temps à faire le même ouvrage? Si l'on fait attention que les 16 ouvriers & les 8 ouvriers doivent être employés à faire le même ouvrage, on remarquera que 16 étant le double de 8, il faudra à ces derniers une fois plus de temps qu'aux premiers pour faire le même ouvrage; ainſi 16 ouvriers feront à 8 ouvriers, ce que le temps que doivent employer les 8 ouvriers pour

faire l'ouvrage, ſera au temps employé par les 16 ouvriers : le terme inconnu eſt donc le tems que doivent employer les 8 ouvriers. Pour trouver ce temps, on multipliera 96 par 6, & l'on diviſera le produit 16 par 8, le quotient 12 ſera le nombre de jours que devront travailler les 8 ouvriers pour faire le même ouvrage.

Quelques Auteurs obſervent avec raiſon, que ces inverſions, très-embarraſſantes au premier abord, deviennent très-faciles, quand on enviſage la queſtion ſous un autre point de vûe, & qu'il ſuffit de la conſidérer comme une régle de Trois compoſée, dans laquelle on fait l'ouvrage = 1, alors les hommes & le nombre des jours qu'ils travaillent ſont la cauſe de l'ouvrage; on diſpoſera enſuite la régle de la maniere ſuivante :

16 fois 6 ſont à 1 ce que 8 fois le nombre cherché eſt à 1, multipliant 16 par 6, & diviſant le produit 96 par 8, on aura comme ci-devant le quotient 12 pour le terme inconnu demandé.

Dans la régle de Trois inverſe compoſée, on obſerve ce qui a été dit de la régle de Trois inverſe ſimple, en ayant l'attention de réduire avant les termes compoſés en termes ſimples; ce que l'on exécutera en plaçant dans des colonnes tous les termes qui compoſent chaque cauſe, & dans d'au-

tres colonnes les termes qui expriment les effets. Suppoſons, par exemple, que 24 hommes travaillant 12 heures, ont fait un ouvrage en 14 jours, on demande en combien de jours 12 hommes feront le même ouvrage en travaillant 6 heures; on diſpoſera l'opération de la maniere ſuivante:

$12 \times 24 : 12 \times 6 :: x : 14$ ou $288 : 72 :: x : 14$; on multipliera 288 par 14, & l'on diviſera le produit 4032 par 72, le quotient 56 eſt le quatriéme terme demandé.

Les régles de Compagnies ſe placent encore dans la claſſe des régles de Trois; qu'eſt-ce en effet qu'une régle de Compagnie, ſinon une régle de proportion dans laquelle il s'agit de partager une ſomme appellée gain total proportionnellement aux miſes particulieres de chaque aſſocié? Il faut, pour y parvenir, faire autant de régles de Trois particulieres qu'il y a d'aſſociés, & donner à ces régles l'ordre ſuivant; la ſomme des miſes pour premier terme, le gain total au ſecond terme, & une des miſes particulieres, au troiſiéme terme: le quotient qui réſulte de chaque opération eſt le gain particulier qui répond à la miſe particuliere:

Exemple.

Trois perſonnes ont mis en ſociété

24000 livres, elles ont gagné enſemble 6000 livres; on demande ce qu'il revient à chacun à raiſon de ſa miſe particuliere, on établira les trois proportions ſuivantes:

$$24000 : 6000 :: 4000 : x = 1000.$$
$$24000 : 6000 :: 8000 : x = 2000.$$
$$24000 : 6000 :: 12000 : x = 3000.$$

On prouve que l'opération eſt bien faite, en ajoutant les trois termes qui forment les gains particuliers: comme leur ſomme eſt égale au gain total, on en conclut que les gains particuliers ſont proportionnels aux miſes & au gain total.

De l'élévation des puiſſances & de l'extraction des racines.

Elever une grandeur à une puiſſance, c'eſt la multiplier autant de fois moins une par elle-même, que l'expoſant de la puiſſance demandée contient d'unités; ainſi élever une quantité a ou b à la troiſiéme puiſſance, c'eſt multiplier la quantité a ou b deux fois par elle-même.

Si l'on demande la troiſiéme puiſſance d'un polynome, il faut multiplier le polynome deux fois par lui-même.

Quand on ne veut qu'indiquer l'élévation à une puiſſance, on tire un trait au-deſſus de la quantité à élever, & on

écrit à l'extrémité à droite de ce trait, l'expoſant de la puiſſance demandée ; ainſi pour déſigner la troiſiéme puiſſance de $a+b$; on l'écrit ainſi, $\overline{a+b}^{3}$.

Extraire une racine quelconque d'une grandeur, c'eſt trouver une quantité, laquelle multipliée un certain nombre de fois indiqué par l'expoſant de la puiſſance dont on veut avoir la racine ; ainſi extraire la racine quarrée d'une grandeur, c'eſt trouver une quantité, laquelle multipliée une fois par elle-même, donne une quantité égale à celle dont on veut avoir cette racine. Extraire la racine cubique, c'eſt trouver une quantité, laquelle multipliée par ſon quarré, produiſe le cube dont on veut avoir la racine. Je me bornerai ici à l'extraction de la racine quarrée & à celle de la racine cubique.

Soit propoſé d'extraire la racine quarrée de 144. Pour y parvenir, je compare le nombre 144 à la formule $a^2+2ab+b^2$, qui repréſente le quarré de la quantité $a+b$, qui peut repréſenter toutes les puiſſances du même genre; je remarque que cette ſeconde puiſſance contient, 1°. le quarré du premier terme ; 2°. le quarré du ſecond terme ; 3°. le double du premier terme multiplié par le ſecond : raiſon-

nant par analogie, je dis: 144, quarré d'une quantité compoſée de deux chiffres; car 81 quarré de 9, le plus grand des nombres ſimples eſt compoſé de deux figures, & 1000 quarré du plus petit des nombres compoſés de trois chiffres, en contient quatre; 145, dis-je, contient le quarré de la premiere figure, celui de la ſeconde, & deux produits de la premiere par la ſeconde; pour trouver ſa racine, je partage le nombre par tranche de deux en deux, en allant de la droite à la gauche, je cherche la racine quarrée de la premiere tranche que je poſe au quotient, c'eſt 1; je retranche le quarré 1 de cette racine de la premiere tranche, & comme il n'y a point de reſte, j'écris zéro, & j'abaiſſe à côté la ſeconde tranche; elle contient, cette ſeconde tranche, le double de la premiere partie de la racine qu'on vient de trouver multipliée par la ſeconde partie que nous allons chercher; plus le quarré de cette ſeconde partie, pour avoir un diviſeur propre à nous faire trouver cette ſeconde partie; je multiplie la premiere par 2, je diviſe par le produit qui en réſulte, le premier chiffre de la ſeconde tranche, & je trouve 2 pour quotient, que j'écris à côté du premier chiffre de la racine; ce qui me donne 12 pour la racine totale;

j'écris auſſi 2 à côté du diviſeur, & je multiplie 22 par 2, j'ai 44 pour produit, lequel retranché de la ſeconde tranche 44, il ne reſte rien; d'où je conclus que 12 eſt la racine quarrée de 144; je m'en aſſure en multipliant 12 par lui-même, je retrouve au produit total 144.

Si on avoit un quarré compoſé de trois tranches, après avoir opéré, comme je viens de le dire, ſur les deux premieres tranches, s'il y avoit un reſte, on abaiſſeroit la troiſiéme tranche à côté de ce reſte, & regardant les deux premiers chiffres de la racine, comme compoſant la premiere figure de cette racine, on les multiplieroit par 2 pour avoir un diviſeur convenable; on diviſeroit par cette quantité ainſi double les premiers chiffres du reſte de la puiſſance, on écriroit le quotient à côté des deux premieres figures & à côté du diviſeur, on multiplieroit ce quotient par lui-même & par le diviſeur, & on retrancheroit le produit de la troiſiéme tranche de la puiſſance; ſi la ſouſtraction ſe faiſoit ſans reſte, on ſeroit aſſuré que les figures qui ſont poſées au quotient, ſont la vraie racine; on s'en aſſureroit encore plus en multipliant cette racine par elle-même: ſi le produit étoit égal à la puiſſance donnée, on ſeroit convaincu qu'on a opéré exac-

tement, & que l'on a la vraie racine de cette puiſſance; en ſuivant le même procédé, on extrairoit la racine quarrée d'une quantité compoſée d'autant de nombres que l'on voudroit, & la formule dont nous nous ſommes ſervis, ſeroit applicable à tous les cas, en enviſageant toutes les quantités écrites à la racine avant d'opérer ſur la derniere tranche, comme ne formant que la premiere partie de la racine.

L'extraction de la racine cubique eſt un peu plus embarraſſante à faire que celle de la racine quarrée; ſi cependant on s'attache à bien connoître les parties de la formule algébrique du cube, il ſera aiſé d'arriver à cette opération. Pour comprendre la formule & ſes parties, nous allons prendre la voie de compoſition, & élever $a+b$ à la troiſiéme puiſſance.

Nous avons dit que pour élever une grandeur quelconque à une puiſſance demandée, il falloit multiplier cette grandeur par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités; pour élever $a+b$ à la troiſiéme puiſſance; il faut donc multiplier $a+b$ par ſon quarré $a^2+2ab+b^2$; pour avoir le cube $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, le cube eſt compoſé des cubes a^3, b^3, de a &

de b, de $3a^2b$, ou trois fois le quarré de a multiplié par la grandeur b ou de $3ab^2$, ou trois fois le quarré de b multiplié par a; raiſonnant par analogie, on trouvera que le cube de 48 ou de $40+8$, doit contenir le cube de 40, & celui de 8 de trois fois le quarré de 40 multiplié par 8, & de trois fois le quarré de 8 multiplié par 40, je forme chacune de ces parties:

1°. Le cube de 40 eſt $40 \times 40 \times 40 =$	64000
2°. Le triple du quarré de 40 multiplié par 8, eſt égal à $40 \times 40 \times 3 \times 8 =$	38400
3°. Le triple du quarré de 8 multiplié par 40 ou $8 \times 8 \times 3 \times 40 =$	7680
4°. Le cube de 8, c'eſt-à-dire, $8 \times 8 \times 8 =$	512
Ces quatre quantités ajoutées, donnent..	110592, cube total.

Nombre que l'on trouve par la multiplication ordinaire, c'eſt-à-dire, en multipliant 48 par lui-même pour avoir ſon quarré 2304; & en multipliant ce quarré 2304 par 48, cette derniere multiplication donnera pour produit le nombre 110592.

Connoiſſant toutes les parties qui en-

trent dans la compoſition du cube d'une quantité, il eſt aiſé de retrouver par la décompoſition la racine cubique. Voici en général la méthode qu'il faut ſuivre pour parvenir à cette décompoſition, ayant ſous les yeux la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; ſi on propoſoit d'extraire la racine cubique du nombre 110592, vous le partagerez en tranches de trois en trois, en allant de droite à gauche, vous ôterez le plus grand cube contenu dans la premiere tranche à gauche, vous écrirez ſa racine au quotient, & retrancherez ce cube de la premiere tranche, & écrirez le reſte s'il y en a un; vous abaiſſerez à côté de ce reſte la tranche ſuivante, & diviſerez les premiers chiffres de ce dividende par le triple du quarré de la premiere figure de la racine; vous écrirez le quotient à côté de cette racine & à côté du diviſeur. Pour vous aſſurer de la juſteſſe de ce quotient, vous ferez à part trois produits; le premier fait du diviſeur par le nouveau quotient; le ſecond fait du triple du quarré du quotient par la premiere partie de la racine; le troiſiéme fait du quotient multiplié par ſon quarré, ce qui en donne le cube; vous écrirez ces trois produits l'un ſous l'autre, de maniere que le ſecond produit ſoit avancé d'un rang vers la droite, relativement au pre-

mier, & que le troiſiéme s'avance auſſi d'un rang relativement au ſecond, vous ajouterez ces trois produits, & retrancherez le produit total du reſte de la puiſſance; & s'il n'y a point de reſte, c'eſt une marque que la racine trouvée eſt la vraie racine, & que la quantité eſt un cube parfait.

Si la quantité dont vous voulez extraire la racine cubique étoit compoſée de plus de deux tranches, vous diviſeriez la troiſiéme tranche & le reſte, s'il y en avoit un, par le triple du quarré des deux figures poſées à la racine, & vous écririez le quotient à côté de ces deux figures, & à côté du diviſeur vous formeriez trois produits comme vous avez fait pour la ſeconde tranche, & vous retrancheriez le produit total du dividende, & s'il n'y avoit point de reſte, vous ſeriez aſſuré que la quantité ſur laquelle vous avez opéré eſt un cube parfait.

Les quantités ſur leſquelles on opere ne ſont pas toujours des puiſſances parfaites, on eſt cependant quelquefois obligé d'avoir une racine qui approche davantage de la racine réelle; dans ce cas-là on a recours aux décimales.

Je ſuppoſe, par exemple, que l'on veuille avoir la racine quarrée de 44, vous ajouteriez quatre ou cinq zéros, & vous extrairiez

trairiez la racine à l'ordinaire.

Dans l'extraction de la racine cubique, il faudroit mettre trois zéros à chaque tranches, & vous ſuivriez pour l'extraction les régles preſcrites ci-deſſus.

Des radicaux.

On appelle *incommenſurables*, des quantités dont on ne peut extraire actuellement une racine demandée; on écrit ces quantités ſous le ſigne $\sqrt{\ }$ qu'on nomme radical, & l'on met au haut de ce ſigne un expoſant qui déſigne quelle eſt la racine demandée. Veut-on indiquer la racine quarrée d'un nombre, il eſt très-ordinaire d'écrire la grandeur dont on veut avoir la racine ſous le ſigne, ſans donner d'expoſant à ce ſigne. La grandeur écrite ſous le ſigne, ſe nomme puiſſance; ainſi dans l'expreſſion $\sqrt[3]{a^4 b^4}$, $a^4 b^4$ eſt la puiſſance dont on demande la racine troiſiéme ou cubique. On met quelquefois avant le ſigne un chiffre qu'on nomme coëfficient; il indique que la quantité radicale doit être répétée un certain nombre de fois.

On fait ſur les radicaux les mêmes opérations que ſur les nombres entiers, mais indépendamment de ces opérations, il en eſt d'acceſſoires & ſans leſquelles il ſeroit impoſſible d'arriver aux réſultats qu'on ſe

propoſe de trouver ; ces préparations conſiſtent, 1°. à réduire des quantités commenſurables en radicaux, & réciproquement à dépouiller du ſigne radical les quantités commenſurables qui ſont ſous les ſignes. 2°. A réduire à l'unité le coëfficient d'une quantité radicale, & réciproquement à réduire au plus grand coëfficient la quantité qui eſt affectée du ſigne radical. 3°. A réduire au même expoſant des radicaux qui en ont de différens.

1°. Pour réduire des quantités commenſurables en radicaux, on éleve ces quantités à la puiſſance indiquée par l'expoſant du ſigne ; ainſi pour réduire la quantité 6 en un radical qui ait 3 pour expoſant, j'éleve 6 au cube, & j'écris ſon cube 216 ſous le ſigne ; ce qui me donne l'expreſſion $\sqrt[3]{216}$, équivalente au nombre 6, pour réduire une quantité d à un radical dont l'expoſant ſoit 4, on élevera d à la quatriéme puiſſance, & l'on écrira $\sqrt[4]{d^4}$, &c. réciproquement pour dégager la quantité commenſurable $\sqrt[3]{216}$ de ſon ſigne ; j'extrait la racine cubique de 216, & j'ai pour quantité équivalente le nombre ou la racine 6.

2°. Veut-on réduire à l'unité le coëfficient d'un radical, il faut élever ce coëf-

ſicient à la puiſſance du degré indiqué par l'expoſant du ſigne, & multiplier la puiſſance qui en réſultera par la quantité qui eſt ſous le ſigne s'il s'en trouve; ainſi pour réduire à l'unité le coëfficient de la quantité $4\sqrt[2]{8}$, on élevera 4 au quarré, l'on aura 16 qu'il faudra multiplier par la quantité 8 qui eſt ſous le ſigne; ce qui donnera l'expreſſion $\sqrt[2]{16\times 8}$, ou $\sqrt[2]{128}$, équivalente à l'expreſſion $4\sqrt[2]{8}$, de même $b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{ab^3}$; réciproquement pour réduire au plus grand coëfficient une quantité radicale, il faut chercher une puiſſance exacte du degré marqué par l'expoſant du radical, laquelle ſoit le plus grand diviſeur de la quantité qui eſt ſous le ſigne, écrire la racine de cette puiſſance avant le ſigne, & laiſſer ſous le ſigne le quotient de la diviſion; par exemple, pour réduire au plus grand coëfficient la quantité $\sqrt[3]{80}$, on diviſeroit 80 par 8, & l'on écriroit ſa racine cubique 2 avant le ſigne, & le quotient 10 ſous le ſigne, enſorte que le radical réduit ſeroit $2\sqrt[3]{10}$, expreſſion équivalente au radical $\sqrt[3]{80}$.

3°. Pour réduire au même expoſant deux quantités radicales qui en ont de différens,

il faut multiplier les expoſans des ſignes les uns par les autres, & élever les puiſſances ſucceſſivement au degré de l'expoſant de l'autre.

Ainſi pour réduire les radicaux $\sqrt[2]{4}$ & $\sqrt[3]{8}$ au même expoſant, je multiplie les expoſans 2 & 3 l'un par l'autre; ce qui donne 6 pour expoſant commun: j'éleve enſuite la puiſſance 4 au cube, & la puiſſance 8 au quarré, ces radicaux réduits deviennent les ſuivans $\sqrt[6]{64}$ & $\sqrt[6]{64}$, ſi l'on avoit plus de deux radicaux à réduire au même expoſant; trois, par exemple, tels que $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[4]{7}$, on multiplieroit les uns par les autres, les expoſans 2, 3, 4 des racines propoſées pour avoir l'expoſant du radical commun, on éleveroit enſuite chacune de ces racines à une puiſſance d'un degré indiqué par le produit des expoſans des autres racines, on écriroit les nouvelles puiſſances chacune ſous un ſigne radical affecté de l'expoſant commun, on parvient auſſi à donner à des radicaux un même expoſant, en prenant, quand cela eſt poſſible, pour expoſant du radical commun le plus petit multiple des expoſans des radicaux propoſés, en diviſant enſuite ce multiple par chacun des expoſans des radicaux à réduire, & en élevant les puiſſances

de ces radicaux chacun à la puiſſance indiquée par le quotient, qui répond à ſon radical. *Exemple.* Les trois radicaux propoſés traités de la maniere qu'on vient de le dire, deviennent les ſuivans : $\sqrt[12]{5^{-6}}$, $\sqrt[12]{4^{-4}}$, $\sqrt[12]{7^{-3}}$, les radicaux $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, ſe convertiſſent en ceux-ci : $\sqrt[mnp]{a^{mp}}$, $\sqrt[mnp]{b^{np}}$, $\sqrt[mnp]{c^{nm}}$.

Dans les opérations ſuivantes nous ſuppoſerons les radicaux réduits au même expoſant ; nous parlerons d'abord de la multiplication & de la diviſion de ces quantités ; & enſuite de leur addition & de leur ſouſtraction.

Pour multiplier ces radicaux, il faut multiplier les unes par les autres les grandeurs qui ſont ſous les ſignes, & écrire le produit ſous le ſigne de l'expoſant commun ; par exemple, pour multiplier $\sqrt[4]{6}$ par $\sqrt[4]{9}$, je multiplie 6 par 9, & j'écris le produit 54 ſous le ſigne $\sqrt[4]{}$, ce qui donne l'expreſſion $\sqrt[4]{54}$; de même les deux radicaux $\sqrt[n]{a^n}$ & $\sqrt[n]{b^n}$ ont pour produits $\sqrt[n]{a^n b^n}$, mais $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{b^n} = b$; ainc iij

ſi $\sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^n} = ab$; or $\sqrt[n]{a^n b^n} = ab$; donc $\sqrt[n]{a^n b^n} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^n}$.

Pour diviſer un radical par un autre, on diviſe la quantité qui eſt ſous le ſigne du radical dividende par la quantité qui eſt ſous le ſigne de la quantité diviſeur, & l'on écrit au-devant du quotient le ſigne radical avec l'expoſant commun aux deux racines; ainſi pour diviſer $\sqrt[4]{16}$ par $\sqrt[4]{8}$, on diviſe 16 par 8, & l'on écrit le quotient 2 ſous le radical $\sqrt[4]{\ }$, ce qui donne pour réſultat de l'opération $\sqrt[4]{2}$, de même $\sqrt[n]{a^n}$ diviſé par $\sqrt[n]{b^n}$, donnent pour quotient $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}$; mais $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{b^n} = b$; ainſi $\sqrt[n]{a^n}$ diviſé par $\sqrt[n]{b^n} = \frac{a}{b}$; or $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$: donc $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}$.

Pour ajouter des radicaux il faut les réduire à leurs plus ſimples termes, s'ils n'y ſont pas; & ſi après cette réduction il s'en trouve qui aient la même quantité ſous le ſigne radical, on les réduit en un ſeul, auquel on donne pour coëfficient la ſomme des coëfficiens qui précédoient ces radicaux; lorſque les radicaux ne ſont pas com-

menſurables entr'eux, l'addition ſe fait en écrivant les quantités avec leurs ſignes les unes après les autres, en interpoſant entre chacune le ſigne qui les précéde.

Premier exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt[2]{3} \\ +\sqrt[2]{6} \\ +\sqrt[2]{5} \\ \hline \sqrt[2]{3}+\sqrt[2]{6}+\sqrt[2]{5} \end{array}$$

Second exemple.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{8} \\ -\sqrt[3]{9} \\ \hline \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}. \end{array}$$

Troiſiéme exemple.

$$\begin{array}{r} \sqrt{45}=3\sqrt{5} \\ \sqrt{108}=6\sqrt{3} \\ \sqrt{150}=5\sqrt{6} \\ \hline \sqrt{45}+\sqrt{108}+\sqrt{150}=3\sqrt{5}+6\sqrt{3}+5\sqrt{6}. \end{array}$$

Quatrième exemple.

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

somme totale. $\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{8}=9\sqrt{2}$.

Cinquième exemple.

$$\sqrt[3]{a^3x} = a\sqrt[3]{x}$$
$$\sqrt[3]{b^3x} = b\sqrt[3]{x}$$
$$\sqrt[3]{c^3x} = c\sqrt[3]{x}$$

$\sqrt[3]{a^3x}+\sqrt[3]{b^3x}+\sqrt[3]{c^3x}=\overline{a+b+c}\sqrt[3]{x}$.

Dans la soustraction il faut, ainsi que dans l'addition, réduire les radicaux à leur plus simple expression, & prendre la différence de leurs coëfficiens s'ils ont la même quantité sous le signe radical.

Exemple. Pour soustraire $\sqrt[2]{8}$ de $\sqrt[2]{18}$, après avoir transformé ces radicaux dans les suivans : $2\sqrt[2]{2}$ & $3\sqrt[2]{2}$, on aura $3\sqrt[2]{2}-2\sqrt[2]{2}=\sqrt[2]{2}$.

Si les quantités radicales ne sont pas commensurables, on se contente d'en indiquer la soustraction de la même maniere qu'on l'a fait pour la soustraction des grandeurs algébriques dissemblables.

Pour élever un radical à une puiſſance quelconque, on ſuivra l'ordre ſuivant. Si la quantité n'a qu'un terme, on élevera le coëfficient & la quantité ſous le ſigne à la puiſſance indiquée, & l'on conſervera au ſigne ſon expoſant, le réſultat ſera la puiſſance demandée, en obſervant de faire la réduction de la grandeur ſous le ſigne à ſa plus ſimple expreſſion, ſi cette réduction eſt poſſible; par exemple, pour élever $4\sqrt{2}$ au quarré, j'ai $16\sqrt{4} = 16 \times 2 = 32$. Si on vouloit avoir le cube de $3\sqrt[3]{27}$, on éleveroit le coëfficient & la grandeur ſous le ſigne à la troiſiéme puiſſance, & l'on trouveroit pour réſultat $27\sqrt[3]{19683}$, & en réduiſant $27 \times 27 = 729$. L'élévation des polynomes à une puiſſance quelconque, ſe fait comme celles des grandeurs commenſurables.

Ainſi pour élever au quarré le binome $2\sqrt{4} + 3\sqrt[3]{6}$, je prens le quarré du premier membre $2\sqrt{4}$ qui eſt $4\sqrt{16}$, & en réduiſant $4 \times 2 = 8$, je prens le double du premier terme que je multiplie par le ſecond, en ayant attention, avant de prendre le double, de réduire ces deux radicaux au même expoſant 6 & j'aurai $2\sqrt[6]{64}$ & $3\sqrt[6]{36}$; ce qui me donne pour le double

du premier membre par le ſecond $4\sqrt[6]{64} \times 3\sqrt[6]{36}$, & enfin $9\sqrt[3]{36}$ pour le quarré du ſecond terme, le quarré total ſera $8 + 12\sqrt[6]{2304} + 9\sqrt[3]{36}$.

Pour élever un radical au cube, s'il n'y a qu'un terme, j'éleve le coëfficient & la quantité qui eſt ſous le ſigne à la troiſiéme puiſſance. Soit propoſé d'élever $4\sqrt[3]{8}$ au cube, j'éleve 4 & 8 au cube, & j'ai $64\sqrt[3]{512}$, & en réduiſant, $64 \times 8 = 512$.

Si on propoſe d'élever un polynome au cube, un binome, par exemple, $3\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{5}$, j'éleve $3\sqrt{2}$, au cube, j'ai $27\sqrt{8}$; & réduiſant $54\sqrt{2}$, je prens trois fois le quarré de $3\sqrt{2}$, que je multiplie par $2\sqrt[3]{5}$; ce qui me donne $108\sqrt[3]{5}$. Je fais le produit de trois fois le quarré de $2\sqrt[3]{5}$ par $3\sqrt{2}$, qui me donne $36\sqrt[6]{5000}$; enfin je prens le cube de $2\sqrt[3]{5}$, & j'ai $8\sqrt[3]{125}$, & en réduiſant 40, &c.

Dans l'extraction des racines on ſuivra la méthode inverſe de celle de l'élévation, s'il eſt queſtion d'extraire la racine quarrée d'un monome, on examinera ſi la quantité ſous le ſigne eſt une puiſſance du degré de l'expoſant du ſigne, & l'on extraira la racine comme on l'a fait ci-de-

vant pour les nombres entiers ; ſi la quantité ſous le ſigne eſt compoſée d'une puiſſance du ſecond degré, ou d'un quarré multiplié par un nombre quelconque, on extraira la racine de la puiſſance que l'on mettra comme coëfficient avant le ſigne, & on laiſſera ſous le ſigne la quantité qui la multiplioit ; par exemple, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2 b^2} = ab$, $\sqrt{a^2 b^2 c} = ab\sqrt{c}$; ſi on a un polynome, par exemple $2 + 2\sqrt[6]{200} + \sqrt[3]{25}$, je cherche la racine quarrée du premier terme, que je trouve $= \sqrt{2}$, je ſouſtrait le quarré 2 de cette racine du premier terme, ce premier terme eſt détruit ; je double la premiere racine $\sqrt{2}$, & je diviſe $2\sqrt[6]{200}$ par $2\sqrt{2}$, ou par $2\sqrt[6]{8}$, qui eſt équivalente, & j'ai pour quotient $\sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{5}$ pour le ſecond terme de la racine je retranche du reſte du nombre propoſé $2\sqrt[6]{200}$, produit de $\sqrt[3]{5}$ multiplié par $2\sqrt{2}$, & le quarré $\sqrt[3]{25}$ de $\sqrt[3]{5}$. Comme il ne reſte rien, on conclut que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$, eſt la racine demandée, comme on peut s'en convaincre par la multiplication.

Dans l'extraction des racines cubiques, on ſuivra les mêmes régles que pour les nom-

bres entiers : ainſi ſi l'on propoſe d'extraire la racine cubique d'un monome $\sqrt[3]{144}$, on cherchera quel eſt le nombre qui, multiplié par ſon quarré, peut donner 144; & ce nombre ſera la racine demandée.

L'extraction de la racine cubique d'un polynome, tel, par exemple, que $8\sqrt{8} - 72\sqrt[3]{5} + 54\sqrt[6]{5000} - 135$, donnera, en ſuivant les régles de l'extraction, pour la racine $2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{5}$; en effet, la racine cubique de $8\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, en prenant la racine tant du coëfficient que de la quantité qui eſt ſous le ſigne, diviſant enſuite $-72\sqrt[3]{5}$ par 24, triple du quarré de $2\sqrt{2}$, on aura pour ſecond terme de la racine $3\sqrt[3]{5}$; ſi l'on fait les trois produits dont on a parlé en traitant de la racine cubique des nombres entiers, on trouvera qu'il ne reſte rien; que par conſéquent $2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{5}$ eſt la racine cubique demandée, comme on peut s'en aſſurer en élevant cette quantité au cube.

Indépendamment des radicaux dont on vient de parler, il en eſt d'autres connus ſous le nom de racines imaginaires; c'eſt ainſi que l'on appelle des grandeurs négatives telles que $-a$, dont la racine a pour expoſant un nombre pair n, par exemple, & l'on déſigne ces racines imaginai-

res comme vous le voyez : $\sqrt[n]{-a}$. Il eſt impoſſible qu'une grandeur négative $-a$ puiſſe avoir aucune racine dont l'expoſant ſoit un nombre pair ; en effet, ſi $-a$ avoit, par exemple, une racine ſeconde, cette racine ſeroit une grandeur poſitive ou une grandeur négative, telle, par exemple, que $\pm b$ ou $\pm c$: il y a plus, la grandeur $-a$ devroit néceſſairement être alors égale à la ſeconde puiſſance de la racine $\pm b$ ou $\pm c$; mais cette puiſſance ſeroit toujours une grandeur poſitive $+bb$ ou $+cc$, à laquelle la grandeur négative $-a$ ne peut être égale, d'où il ſuit qu'il eſt impoſſible que la grandeur $-a$ ait une racine ſeconde.

On fait ſur les racines imaginaires les mêmes opérations que ſur les quantités radicales réelles : je vais donner des exemples de chacune de ces opérations, dans leſquels on remarquera la route qu'il faut ſuivre.

Exemples d'addition.

Premier exemple.	*Second exemple.*
$+\sqrt{-5}$	$+\sqrt{-5}$
$-\sqrt{-8}$	$-\sqrt{-8}$
$+\sqrt{-5}+\sqrt{-8}$	$+\sqrt{-5}-\sqrt{-8}.$

Troiſiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-c} \\ +\sqrt{-d} \\ \hline +\sqrt{-c}+\sqrt{-c} \end{array}$$

Quatriéme exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-c} \\ -\sqrt{-d} \\ \hline +\sqrt{-c}-\sqrt{-d}. \end{array}$$

Cinquiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +4\sqrt{-5} \\ +3\sqrt{-5} \\ \hline +7\sqrt{-5} \end{array}$$

Sixiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +4\sqrt{-5} \\ -3\sqrt{-5} \\ \hline +1\sqrt{-5} \end{array}$$

Septiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +m\sqrt{-c} \\ +n\sqrt{-c} \\ \hline +m+n\sqrt{-c} \end{array}$$

Huitiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +m\sqrt{-c} \\ -n\sqrt{-c} \\ \hline +m-n\sqrt{-c}. \end{array}$$

EXEMPLES DE LA SOUSTRACTION.

Premier exemple.

de $+\sqrt{-5}$ il faut ſouſtraire $+\sqrt{-3}$

$$+\sqrt{-5}-\sqrt{-5}.$$

Second exemple.

De $+\sqrt{-5}$ il faut ôter $-\sqrt{-3}$

$$+\sqrt{-5}+\sqrt{-3}$$

Troiſiéme exemple.

De $+\sqrt{-b}$ il faut ſouſtraire
$+\sqrt{-c}$

$\sqrt{-b}-\sqrt{-c}$.

Quatriéme exemple.

De $+\sqrt{-b}$ il faut retrancher
$-\sqrt{-c}$

$+\sqrt{-b}+\sqrt{-c}$.

Cinquiéme exemple.

De $10\sqrt{-5}$ retrancher
$7\sqrt{-5}$

$3\sqrt{-5}$.

Sixiéme exemple.

De $10\sqrt{-5}$ ôtez
$-7\sqrt{-5}$

$17\sqrt{-5}$.

Septiéme exemple.

De $m\sqrt{-c}$ ôtez
$n\sqrt{-c}$

$m\sqrt{-c}-n\sqrt{-c}$.

Huitiéme exemple.

De $m\sqrt{-c}$ retrancher $-n\sqrt{-c}$

$$m\sqrt{-c}+n\sqrt{-c}.$$

De la multiplication des racines imaginaires.

On propose de multiplier les quantités :

Premier exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ \text{par } +\sqrt{-4} \\ \hline +\sqrt{-5}\times\sqrt{-4}. \end{array}$$

Second exemple.

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ -\sqrt{-4} \\ \hline +\sqrt{-5}\times\sqrt{-4}. \end{array}$$

Troisiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ -\sqrt{-4} \\ \hline -\sqrt{-5}\times\sqrt{-4}. \end{array}$$

Quatriéme exemple.

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ -\sqrt{-4} \\ \hline +\sqrt{-5}\times\sqrt{-4}. \end{array}$$

Cinquiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ +\sqrt{-5} \\ \hline -5. \end{array}$$

Sixiéme exemple.

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ -\sqrt{-5} \\ \hline +5. \end{array}$$

Septiéme

Septiéme exemple.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ -\sqrt{-5} \\ \hline +5 \end{array}$$

Huitiéme exemple.

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ +\sqrt{-5} \\ \hline +5 \end{array}$$

Division des quantités imaginaires.

Premier exemple.

$$\left.\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ \hline +\sqrt{-4} \end{array}\right\} \text{quotient} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-4}}$$

Second exemple.

$$\left.\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ \hline +\sqrt{-5} \end{array}\right\} \text{quotient} + 1.$$

Troiſiéme exemple.

$$\left.\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ \hline -\sqrt{-4} \end{array}\right\} \text{quotient} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-4}}$$

Quatriéme exemple.

$$\left.\begin{array}{r} -\sqrt{-5} \\ \hline -\sqrt{-5} \end{array}\right\} \text{quotient} + 1.$$

Cinquiéme exemple.

$$\left.\begin{array}{r} +\sqrt{-5} \\ \hline -\sqrt{-4} \end{array}\right\} \text{quotient} - \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-4}}.$$

Sixiéme exemple.

$$\frac{+\sqrt{-5}}{-\sqrt{+5}} \quad \text{quotient} - 1.$$

Septieme exemple.

$$\frac{-\sqrt{-5}}{+\sqrt{-4}} \quad \text{quotient} - \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-4}}.$$

Huitiéme exemple.

$$\frac{-\sqrt{-5}}{+\sqrt{-5}} \quad \text{quotient} - 1.$$

Pour peu que l'on ſuive la marche de ces opérations, on verra qu'elles ſont les mêmes que celles des quantités radicales ſur leſquelles nous avons opéré ci-devant. Les principes ſe rapportent auſſi à ceux que nous avons donnés ſur les grandeurs commenſurables; enſorte que ſi on s'eſt familiariſé avec les premières opérations que nous avons données au commencement de cette Introduction, on ne trouvera aucune difficulté à faire celles-ci, comme le calcul des radicaux & celui des quantités imaginaires eſt de la plus grande importance en Algébre, nous ne ſçaurions trop recommander de ſe le rendre très-familier.

Fin de la premiere Partie.

INTRODUCTION
A L'ANALYSE PRATIQUE.

SECONDE PARTIE.

Des Equations.

POUR marquer qu'une grandeur ab eſt égale à x, on écrit $ab = x$; or cette expreſſion ſe nomme équation : elle eſt compoſée de deux membres ſéparés par le ſigne $=$, la partie qui eſt avant le ſigne $=$, forme le premier membre de l'équation ; celle qui eſt après le ſigne en eſt le ſecond membre.

L'Analyſe eſt la ſcience des équations ; on parvient à réſoudre par ſon moyen, les queſtions qu'on propoſe ſur les grandeurs.

Le moyen le plus ſimple d'arriver à la réſolution des problêmes, c'eſt ſans doute celui qui nous apprend à former le moins de raiſonnemens poſſibles ſur une queſtion

propoſée, & d'en ſaiſir d'un coup d'œil tous les rapports : c'eſt pour parvenir à cet art que nous allons raſſembler dans cette Introduction, & le plus ſuccinctement poſſible, les principes ſur leſquels il eſt fondé. Avant de donner ces principes, je ferai voir dans la réſolution d'un ou deux problêmes, la route que les premiers Analyſtes ont dû ſuivre pour y arriver.

PROBLEME I.

On ſuppoſe, par exemple, que trois perſonnes ont enſemble 112 ans, que la ſeconde a 8 ans de plus que la plus jeune; enfin que l'âge de la troiſiéme eſt égal à celui des deux autres, on déſireroit d'après cet énoncé connoître l'âge de chacune de ces perſonnes.

Soit l'âge de la plus jeune $= x$, celui de la ſeconde ſera $x + 8$; enfin $2x + 8$ ſera l'âge de la troiſiéme. La queſtion traduite en langage algébriſte, ſera donc repréſentée par les expreſſions ſuivantes :

x, âge du plus jeune.
$x + 8$, âge du ſecond.
$2x + 8$, âge du troiſiéme.

Puiſque ces expreſſions déſignent les âges ſéparés de ces trois perſonnes, en les réuniſſant on aura la ſomme des trois âges,

leſquels, par les conditions du problême, égalent enſemble à 112 : donc $x+x+8+2x+8$, ou $4x+16=112$, or puiſque $4x+16=112$ ans, $4x$ valent 112 ans moins 16 ans, ou $4x=96$ ans, & $x=\frac{96}{4}=24$; donc l'âge du plus jeune eſt de 24 ans; celui du ſecond, 32 ans, & celui du troiſiéme, 56 ans; en effet, ces trois ſommes réunies donnent 112.

PROBLEME II.

On demande à un homme combien il a d'écus, il répond ſi vous ajoutez la moitié, le tiers & le quart de ce que j'ai, vous aurez un écu de plus que moi; combien a-t-il d'écus ?

Quel que ſoit ce nombre, je le déſigne par x; cela poſé, voici comme je raiſonne; puiſque la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$ & le $\frac{1}{4}$ des écus de cet homme ſurpaſſe ce qu'il a d'un écu, on a pour les conditions du problême $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+1$, je réduis les deux membres de cette équation en fractions de mêmes dénominations, j'ai l'équation ſuivante : $\frac{12x}{24}+\frac{8x}{24}+\frac{6x}{24}=\frac{24x}{24}+\frac{24}{24}$, ou comme tous les termes ſont diviſés par 24, je ſupprime ce

dénominateur dans tous les termes, l'équation devient $12x + 8x + 6x = 24x + 24$, en réduiſant $26x = 24x + 24$, retranchant $24x$ de part & d'autre, on a $2x = 24$ & $x = 12$; c'eſt-à-dire, que cet homme avoit 12 écus: or ce nombre répond aux conditions du problême; en effet, 6 moitié de 12, + 4 tiers du même nombre, + 3 quart du même nombre, ajoutés enſemble, donnent 13, nombre qui ſurpaſſe 12 d'une unité. On trouvera dans l'Analyſe d'autres problêmes du même genre.

PROBLEME III.

La ſomme de deux nombres = 42, leur différence = 6, quels ſont ces deux nombres? Puiſqu'il y a deux inconnus, il doit y avoir deux équations; je déſignerai la premiere inconnue par x, & la ſeconde par y: cela poſé, je raiſonnerai ainſi: puiſque la ſomme de ces deux nombres eſt égal à 42, la premiere équation donnera $x + y = 42$. Premiere condition.

La ſeconde condition nous apprend que ces nombres different l'un de l'autre de la quantité 6; donc $x - y = 6$, je prens la valeur d'une des inconnues dans la ſeconde équation; c'eſt-à-dire, que je fais $x = y + 6$; ſubſtituant cette valeur de x

dans la premiere équation, j'ai $y+6+y=42$, & en tranſpoſant $2y=42-6$, enfin $\frac{42-6}{2}=y$; donc $y=18$: ſi on vouloit avoir la valeur de x, on prendroit la valeur de y dans la premiere équation, on auroit $y=a-x$; ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde équation, on auroit $x-a+x=b$, & réduiſant & tranſpoſant $2x=a+b$, diviſant par 2, on a $x=\frac{a+b}{2}$. On peut réſoudre le problême d'une autre maniere; ſoit comme ci-devant $x+y=a$ & $x-y=b$; ſi on ajoute ces deux équations termes par termes, on aura $x+y+x-y=a+b$, & réduiſant $2x=a+b$, diviſant par 2, $x=\frac{a+b}{2}$, pour avoir la valeur de y, on retranchera la ſeconde équation de la premiere; ce qui donnera $x+y-x+y=a-b$, & réduiſant & diviſant par 2, $y=\frac{a-b}{2}$.

Dans la réſolution de ces trois problêmes on aura dû remarquer que pour dégager l'inconnue, on s'eſt attaché à faire enſorte que l'inconnue reſtât ſeule dans un membre; & toutes les équations connues dans l'autre membre; on y eſt parvenu, 1°. en

faiſant paſſer pluſieurs des termes d'un membre dans l'autre en changeant leurs ſignes. 2°. A ſubſtituer dans l'équation la valeur d'une quantité à la place d'une autre: les obſervations ſuivantes ſerviront à rendre la théorie des équations plus ſimple & plus lumineuſe. Nous allons établir quelques axiomes ſur leſquelles elles ſont fondées.

Si à des grandeurs égales on ajoute des quantités égales, ou ſi de grandeurs égales on retranche des quantités égales, les ſommes ou les différences ſont égales.

Si on multiplie ou ſi on diviſe des quantités égales par une même quantité, les produits ou les quotiens ſeront égaux; ſi on éleve à la même puiſſance des quantités égales, ou ſi de puiſſances égales on extrait la même racine, les puiſſances ou les racines réſultantes ſeront encore égales.

Il faut, avant de tenter la ſolution d'un problême, s'attacher à bien comprendre l'état de la queſtion, & à ſe rendre l'énoncé du problême familier.

On diſtinguera enſuite les quantités connues des inconnues, en déſignant par les premieres lettres de l'alphabet ou par les lettres initiales des choſes qu'elles expriment, celles de la premiere eſpéce, & en marquant les autres par les dernieres lettres. Examinant enſuite les données

du problême avec beaucoup d'attention, on formera, ſi cela eſt poſſible, autant d'équations qu'il y a d'inconnues : dans ce cas-là le problême eſt déterminé ; au contraire il eſt indéterminé quand la nature du problême eſt telle qu'on trouve moins d'équations qu'il y a d'inconnues, ou qu'on en trouve un plus grand nombre. Le problême ne donne-t-il qu'une équation, on trouve la valeur de l'inconnue en mettant dans un ſeul membre toutes les quantités connues, & l'inconnue dans l'autre.

Le problême renferme-t-il pluſieurs équations, il faut prendre la valeur d'une des inconnues dans une de ces équations, ſubſtituer cette valeur dans les autres, & faire la même choſe par rapport aux autres équations, juſqu'à ce qu'enfin on parvienne à avoir une derniere équation qui contienne dans un de ces membres toutes les quantités connues, & une ſeule inconnue dans l'autre membre. Avant de paſſer plus avant, nous ferons obſerver qu'on diſtingue pluſieurs eſpéces d'équations ; dans celle de la premiere eſpéce il n'y a qu'une inconnue mêlée avec des quantités connues : dans celle de la ſeconde eſpéce, il ſe trouve pluſieurs inconnues, & ces inconnues ſont tellement liées entr'elles, que combinées enſemble de la maniere que

nous l'enſeignerons, on arrive enfin à une derniere équation qui ne contient plus qu'une inconnue, on eſt obligé, pour parvenir à ce dernier réſultat, de recourir à différentes transformations, leſquelles ſervent à ſimplifier, autant qu'il eſt poſſible, l'équation finale.

Pour tendre à cette ſimplification, il faut ordonner les termes de l'équation ſuivant les dimenſions de l'inconnue, mettre à la premiere place le terme où l'inconnue a la plus grande dimenſion, ainſi des autres termes, ſuivant le rang qui leur convient. Les termes peuvent être poſitifs ou négatifs, c'eſt-à-dire, précédés des ſignes + ou —: on peut encore enviſager les équations ſous un autre point de vûe, c'eſt-à-dire, relativement au plus haut degré, à la plus haute puiſſance où l'inconnue eſt élevée; de-là pluſieurs degrés d'équations, celle du premier degré eſt celui dans lequel l'inconnue a l'unité pour expoſant; dans les équations du ſecond, du troiſiéme & du quatriéme degré, l'expoſant de l'inconnue eſt 2, 3, 4, &c. on a dans les équations ſuivantes des exemples du premier, du ſecond & du troiſiéme degré.

$$x = a$$
$$xx = ax + b$$
$$xxx = ax^2 + bx + c.$$

Ces équations ſont égales à

$$x - a = 0$$
$$xx - ax - b = 0$$
$$xxx - ax^2 + bx + c = 0.$$

Il arrive quelquefois qu'il manque un ou pluſieurs termes dans une équation; dans l'équation $x^3 - c^2y + c^3 = 0$, il manque le ſecond terme; cette équation n'en eſt pas moins du troiſiéme degré. Ceci bien conçu, paſſons aux différens moyens auxquels l'algébre a recours pour réſoudre les équations; ils ſont compris dans les obſervations ſuivantes.

En parlant des réductions algébriques, nous avons dit qu'elles tendoient à ſimplifier les quantités ſur leſquelles on opére. Si on agit ſur une équation, on la ſimplifiera en effaçant les termes qui ſe détruiſent; on parvient à cette ſimplification par l'addition ou par la ſouſtraction : l'équation $4c - 4a + 4x = 6a - 3x$ devient après la réduction $7x = 10a - 4c$; cette opération, qu'on nomme auſſi transformation, peut avoir lieu dans toutes les équations, pourvû qu'on obſerve de changer les ſignes des termes que l'on tranſpoſe.

On a recours à la multiplication ou à la diviſion pour ſimplifier une équation,

toutes les fois qu'il ſe trouve une quantité qui multiplie ou diviſe tous les termes de cette équation; dans le premier cas on a recours à la diviſion, & dans le ſecond cas à la multiplication, en obſervant d'opérer de la même maniere ſur les deux membres. Soit l'équation $12cc-14bc=4cx$. Si je diviſe les deux membres par c, l'équation devient $12c-14b=4x$ ou $x=\frac{12c-14b}{4}$. Soit auſſi l'équation $\frac{d^4}{bc}+\frac{d^2x}{cc}=\frac{xx}{c}$; multipliant toute l'équation par c, elle devient $\frac{d^4}{c}+\frac{d^2x}{c}=xx$.

Les équations renferment aſſez ſouvent des fractions irréductibles; quelquefois même la lettre, ſuivant les dimenſions de laquelle il faut ordonner les termes, peut ſe trouver au dénominateur, alors on multiplie tous les termes de l'équation par le dénominateur; ou bien encore, quand cela eſt poſſible, par un de ſes facteurs: on parvient par ce moyen à faire évanouir le dénominateur. Qu'on ait, par exemple, l'équation $\frac{dy}{b-y}+c=y$, & que l'on veuille ordonner l'équation ſelon les dimenſions de y, qui eſt contenu dans le dénominateur $d-y$; je multiplie tous les termes

par le dénominateur ; ce qui me donne $dy + dc - cy = dy - yy$, & en tranſpoſant $yy = cy - dc$.

Il peut arriver qu'une quantité irréductible ſourde enveloppe la lettre ſelon les dimenſions de laquelle l'équation doit être ordonnée ; dans ce cas, on laiſſe la quantité ſourde ſeule dans un membre de l'équation, & l'on fait paſſer le reſte des termes dans l'autre membre ; on éleve enſuite chaque membre à la puiſſance indiquée par l'expoſant du radical. Soit, par exemple, l'équation $\sqrt{cc - cx} - c = x$, qu'il faut ordonner ; ſuivant les dimenſions de la lettre x je fais paſſer c dans l'autre membre, j'éleve l'un & l'autre membre au quarré ; ce qui donne l'équation $cc - cx = xx - 2cx + cc$, laquelle devient, en tranſpoſant, $cx = xx$, & en diviſant par x, on a enfin $c = x$.

Une équation ordonnée ſuivant les principes précédens, ſi la plus haute puiſſance ſe trouve multipliée par quelque quantité connue, on dégage l'inconnue en diviſant toute l'équation par cette quantité, l'équation $5x = b$ devient $x = \frac{b}{5}$, l'équation $\frac{gy}{d} = d$ devient $gy = dd$, & divi-

ſant par g, on a $y = \frac{dd}{g}$, de même $\frac{ay^2}{b} = d$ devient $ay^2 = bd$, ou $y^2 = \frac{bd}{a}$, enfin $y = \sqrt{\frac{bd}{a}}$.

Si une équation eſt un multiple d'une quantité complexe par une autre quantité, on parvient à la réduire & à la ſimplifier, en diviſant tous ces termes par la quantité dont elle eſt multiple; par exemple, ſi on avoit une équation telle que $x^3 + 2cxx - bcx - bxx - 2bcx + bbc$, cette équation réduite & diviſée par $x - b$, devient $x^2 + 2cx - bc$.

Il eſt encore un moyen de ſimplifier & de réduire une équation, c'eſt, quand cela eſt poſſible, en extrayant une même racine de chacun des membres. Si on avoit, par exemple, l'équation $y^3 = \frac{1}{8}b^3 - c^3$, on auroit, en extrayant la racine cubique, $y = \sqrt{\frac{1}{8}b^3 - c^3}$, l'équation $z^2 + cc = 2cz + bb$ deviendroit par la tranſpoſition $z^2 - 2cz + cc = bb$, & en extrayant la racine quarrée de chaque membre $z - c = \pm b$, & enfin $z = c \pm b$. Ces principes nous conduiſent naturellement aux moyens de dégager l'inconnue dans les roblêmes du premier & du ſecond derés; il nous reſte peu de choſes à ajou-

ter, c'eſt d'indiquer en particulier quels ſont les cas dans leſquels il faut recourir à un de ces moyens plutôt qu'à un autre. Quelques exemples ſuffiront pour éclaircir ce que j'ai à dire à ce ſujet : a-t-on, par exemple, l'équation $x-b=a$, ſi on ſe rappelle qu'une quantité ajoutée & ſouſtraite dans une même équation, ſe détruit, on en conclura qu'en écrivant $+b$ dans chaque membre de l'équation $x-b=a$, ce qui n'en changera pas la valeur, on aura $x-b+b=a+b$, laquelle équation réduite, donnera $x=a+b$; d'où l'on conclura que toutes les fois qu'une quantité ſera ſouſtraite d'une autre dans un membre d'une équation, on parviendra à dégager cette quantité, en employant l'addition & la réduction. Veut-on réduire à zéro le ſecond membre de l'équation $y=c-d+f$, il faudra écrire à part les grandeurs c, d, f avec des ſignes contraires à ceux qui les précédent, l'équation deviendra $x-c+d-f=c-d+f-c+d-f$, & par réduction, $x-c+d-f=0$. Veut-on réduire l'équation $y-4a+7a=36$ à moins de termes, on retranchera $-4a$ de $+7a$ dans le premier membre, l'équation deviendra $y-3a=36$, & par tranſpoſition $y=36-3a$, de même l'équation $x+7\sqrt{aa}-$

$4\sqrt{aa}=b$, deviendroit après la ſouſtraction $x+3\sqrt{aa}=b$, & par la tranſpoſition $x=b-3\sqrt{aa}$; d'où l'on conclut que toutes les fois que les grandeurs à réduire ſont dans un membre, il faut les ajouter ſuivant les régles preſcrites; ou ſi elles ſont répandues dans les deux membres, les faire paſſer dans un, en obſervant de changer leurs ſignes: dans les exemples que je viens de donner, on a été obligé de recourir à l'addition & à la ſouſtraction pour parvenir à ſimplifier les équations.

Veut-on délivrer une équation des fractions qu'elle renferme, on y parviendra 1°. en réduiſant tous les termes de l'équation en des fractions de même dénomination, en ajoutant de part & d'autre les termes qui compoſent chacun des membres: 2°. & en effaçant le dénominateur commun. Soit, par exemple, l'équation $\frac{x}{c}+\frac{d}{e}=f+9$, en opérant comme je l'ai dit, cette équation ſera transformée en la ſuivante: $\frac{xe}{ce}+\frac{dc}{ce}=\frac{fce+9ce}{ce}$; effaçant le dénominateur commun dans les deux membres, on aura $xe+de=fce+9ce$; de même l'équation

tion $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 4 = 10$ devient $\frac{4x}{8} + \frac{2x}{8} + \frac{32}{8} = \frac{80}{8}$, & effaçant le dénominateur $6x + 32 = 80$, ou $6x = 48$.

En examinant la marche qu'on vient de ſuivre, on s'appercevra qu'on a multiplié tous les termes de l'équation par le produit des dénominateurs des fractions. On ſeroit parvenu au même réſultat en multipliant l'un & l'autre membre de l'équation par le dénominateur de la premiere fraction, ce qui auroit réduit l'équation à une fraction de moins; on auroit enſuite multiplié cette derniere équation par le dénominateur de la ſeconde fraction, enſorte que par cette derniere opération chacun des membres auroit été compoſé de quantités entieres, il ne reſteroit plus qu'à employer la réduction & la tranſpoſition pour n'avoir plus que l'inconnue dans un membre. Dans la derniere équation l'inconnue a un coëfficient : or on ne peut avoir la valeur de cette inconnue, qu'en réduiſant à l'unité le coëfficient de cette inconnue, on y parvient en diviſant tous les termes de l'équation par le coëfficient, ainſi l'équation $6x = 48$, devient $x = \frac{48}{6}$, ou $x = 8$.

Quelquefois il manque un terme dans

un des membres d'une équation, on parvient à ſimplifier cette équation, 1°. en ajoutant à chaque membre le terme qui manque, & en extrayant enſuite la racine ſeconde ou troiſiéme de chacun des membres. Soit l'équation $xx+cx=a+b$, laquelle eſt du ſecond degré, en comparant cette équation avec celle-ci $a^2+2ab+b^2=x^2$, on s'appercevra que c'eſt le troiſiéme terme qui manque; or ce troiſiéme terme répond à b^2, quarré de b, moitié du coëſſicient $2b$ qui multiplie a; pour avoir le troiſiéme terme nous prendrons la moitié du coëfficient c, qui multiplie x pour avoir ſon quarré $\frac{1}{4}c^2$, que nous ajouterons à chaque membre. L'équation étant complette; il ſuffira, pour dégager l'inconnue, d'extraire la racine quarrée de chaque membre. Dans ce que j'ai dit, j'ai laiſſé entrevoir la maniere de dégager une inconnue: & d'arriver à la ſolution d'un problême, je vais entrer dans un peu plus de détail.

Soit propoſé de trouver la valeur de l'inconnue x dans l'équation $ax+bx-c+d=f+g$, je remarque que a & b ſont multipliés par x; ainſi $ax+bx=\overline{a+b}\times x$, ſi on diviſe donc les deux membres par $a+b$, l'équation deviendra $x=\frac{c+d}{a+b}=$

$\frac{f+g}{a+b}$, & en tranſpoſant $x = \frac{c-d+f+g}{a+b}$.

Si l'on avoit deux équations qui continſſent une même inconnue, & qu'il fallût trouver la valeur de cette inconnue, on y parviendroit de la maniere ſuivante. Soient les deux équations $y^3 - 2y^2 + 4y - 8 = 0$ & $y^2 - 4y + 4 = 0$; je mets la lettre majuſcule A à la tête de la premiere équation, & B à la tête de la ſeconde, comme vous le voyez :

A, $y^3 - 2y^2 + 4y - 8 = 0$
B, $y^2 - 4y + 4 = 0$.

Je prens la valeur du premier terme y^2 de l'équation B, en faiſant paſſer les autres termes dans le ſecond membre, j'ai l'équation C, $y^2 = 4y - 4$, j'éleve cette équation à la même puiſſance que l'équation A, en multipliant $y^2 = 4y - 4$ par y, j'ai D, $y^3 = 4y^2 - 4y$; je ſubſtitue cette valeur de y^3 dans l'équation A; ce qui donne $4y^2 - 4y - 2y^2 + 4y - 8 = 0$, & réduiſant $2y^2 - 8 = 0$; mais l'équation C donne $y^2 = 4y - 4$: multipliant les deux membres de cette équation par 2, on trouve $2y^2 = 8y - 8$, je ſubſtitue $8y - 8$ à la place de $2y^2$ dans l'équation $2y^2 - 8 = 0$; ce qui donne D, $8y - 8 - 8$ ou D, $8y - 16 = 0$, & tranſpoſant $8y = 16$:

diviſant les deux membres par le coëfficient 8, on a $y = \frac{16}{8} = 2$, on conçoit aiſément que ſi y eût été élevé à la quatriéme puiſſance, il eût fallu multiplier tous les termes de l'équation C par le quarré de y, pour parvenir à la ſimplification demandée.

Dans les équations ſur leſquelles nous venons d'opérer, les coëfficiens étoient les mêmes; il pourroit arriver qu'ils fuſſent différens: dans ce cas on multiplieroit tous ceux de l'équation A & ceux de l'équation D, par le coëfficient du premier terme de l'équation B.

Les principes que je viens d'établir, renferment la théorie générale des équations; c'eſt en les modifiant beaucoup, & en s'exerçant à la réſolution des problêmes, qu'on peut acquérir l'habitude & la facilité. Je vais donner encore quelques problêmes plus compliqués que les précédens, dans leſquels on remarquera aiſément l'application de nos principes.

PROBLEME.

Paul, en arrivant à Paris, a dépenſé le premier jour le $\frac{1}{3}$ de ſon argent, le ſecond le $\frac{1}{4}$, le troiſiéme le $\frac{1}{5}$, il ne lui reſtoit plus alors que 26 livres; on demande combien il avoit d'argent?

Dans ce problême il n'y a que l'argent de Paul d'inconnu ; il n'y a par conſéquent qu'une équation à faire.

Pour y parvenir, je ſuppoſe l'argent de Paul $= x$, & je raiſonne ainſi : puiſqu'après avoir dépenſé le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ & le $\frac{1}{5}$ de ſon argent, il ne reſtoit plus que 26 livres à Paul : donc x eſt égal à $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 26$. Voilà le problême en équation : faiſant évanouir les fractions comme on l'a dit, on parvient à une équation finale, dans laquelle il n'y en a plus ; c'eſt-à-dire, que l'on a $20x + 15x + 12x + 1560 = 60x$; & réduiſant & tranſpoſant, on a $13x = 1560$, & $x = \frac{1560}{13} = 120$ livres.

PROBLEME.

Faire 24 ſols en trente piéces de 6 deniers & de 18 deniers.

Solution.

Repréſentant le nombre de piéces de ſix deniers par x, on aura pour les piéces de dix-huit deniers $30 - x$, mais chacune des piéces qui compoſent x, valent $\frac{1}{2}$ ſol ; celles qui compoſent $30 - x$, valent $\frac{3}{2}$ ſols, la quantité de ſols contenue dans $30 - x$ égale donc $45 - \frac{3}{2}x$: or par

les conditions du problême $\frac{1}{2}x + 45 - \frac{3}{2}x = 24$, ou en tranſpoſant $45 - 24 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x$; donc $45 - 24 = x$, ou $21 = x$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra vingt-une piéces de deux liards, & neuf piéces de dix-huit deniers.

PROBLEME.

Etant dans une campagne, on apperçoit une tour qui eſt élevée de 32 toiſes au-deſſus des maiſons qui l'environnent : on ſuppoſe que les $\frac{2}{3}$ & le $\frac{1}{5}$ de cette tour ſont cachés ; on demande la hauteur totale. Quelle que ſoit cette hauteur, je l'appelle x ; je nomme a la quantité connue 32 ; cela poſé par les conditions du problême, $\frac{2x}{3} + \frac{x}{5} + a = x$: faiſant évanouir les dénominateurs, j'ai $13x + 15a = 15x$; tranſpoſant $15a = 2x$ & $\frac{15a}{2} = x$; mais $15a = 32 \times 15 = 480$, par conſéquent $x = \frac{480}{2} = 240$.

Je vais maintenant paſſer à des problêmes qui ſont plus embarraſſans, & qui demandent par conſéquent plus d'attention de la part de celui qui entreprend leur réſolution ; tel eſt le ſuivant, qui contient quatre inconnues, & que j'enſeigne à réſoudre de trois manieres différentes.

PROBLEME.

Trouver quatre grandeurs avec les conditions ſuivantes, la ſomme des trois premieres eſt égale à la quatriéme, plus 50; la ſomme de la premiere, de la troiſiéme & de la quatriéme eſt égale à la ſeconde, plus 40; la ſomme de la premiere, de la ſeconde & de la quatriéme, eſt égale à la troiſiéme, plus 30; la ſomme de la ſeconde, de la troiſiéme & de la quatriéme, eſt égale à la premiere, plus 20. Il y a pluſieurs moyens de réſoudre ce problême que nous allons donner. Mettons d'abord le problême en équation; puiſqu'il y a quatre inconnues, il doit y avoir quatre équations, ſuivant les conditions du problême, on aura les quatre équations ſuivantes. Déſignons les quantités connues par les lettres a, b, c, d.

$$u+x+y=z+a \quad (A)$$
$$u+x+z=y+b \quad (B)$$
$$u+y+z=x+c \quad (C)$$
$$x+y+z=u+d \quad (D).$$

Premiere méthode.

1°. Je prens la valeur d'une inconnue, de u; par exemple, dans l'équation A, j'ai $u=z+a-x-y$ (E): je ſubſtitue cette

valeur dans les trois équations B, C, D; ce qui donne les équations ſuivantes:

$$2z - 2y + a = b \text{ (F)}$$
$$2z - 2x + a = c \text{ (G)}$$
$$2x + 2y = a + d \text{ (H)}.$$

2°. Je prens la valeur d'une autre inconnue dans une de ces trois dernieres équations; celle de z dans l'équation F; qui devient $2z = b + 2y - a$, ou $z = \frac{b+2y-a}{2}$ (I): je ſubſtitue cette nouvelle valeur dans l'équation (G), elle devient $2y - 2x + b = c$ (K); l'équation H reſte telle qu'elle étoit, parce qu'il n'y a point de z: j'opere enſuite ſur ces deux dernieres équations; c'eſt-à-dire, que;

3°. Je prens la valeur d'une des inconnues y dans une de ces équations, par exemple, dans l'équation (K); ce qui donne $2y = 2x - b + c$ ou $y = \frac{2x-b+c}{2}$ (M): ſubſtituant cette valeur de y à ſa place dans l'équation (H), j'ai l'équation $4x - b + c = a + d$ (L), dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue dont il eſt aiſé d'avoir la valeur. Il faut d'abord tranſpoſer les quantités qui accompagnent l'inconnue, & diviſer les deux membres par le coëfficient de cette inconnue, on aura

$x = \frac{a+b-c+d}{4}$: il eſt aiſé d'avoir la valeur des autres inconnues, en ſubſtituant dans l'équation M la valeur de x, on aura $y = \frac{a-b+c+d}{4}$: ſubſtituant dans l'équation (I) ou $z = \frac{b+2y-a}{2}$, la valeur de y, on aura $2z = \frac{-a+b+c+d}{2}$; & diviſant tout par le coëfficient de z, on aura $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$; enfin ſubſtituant dans l'équation (E), les valeurs de x, y, z, on aura $u = \frac{a+b+c-d}{4}$.

Seconde méthode.

Soient, comme ci-devant, les quatre équations

$$u+x+y=z+a \quad (A)$$
$$u+x+z=y+b \quad (B)$$
$$u+y+z=x+c \quad (C)$$
$$x+y+z=u+d \quad (D).$$

Je prens dans toutes ces équations la valeur d'une même inconnue, de la grandeur u, par exemple, ce qui donne les équations ſuivantes :

$$u = z - x - y + a \quad (E)$$
$$u = y - x - z + b \quad (F)$$
$$u = x - y - z + c \quad (G)$$
$$u = x + y + z - d \quad (H).$$

Je compare enſuite ces valeurs de u deux par deux, c'eſt-à-dire, la premiere avec la ſeconde, la premiere avec la troiſiéme, & la premiere avec la quatriéme; ce qui me donnera les équations ſuivantes:

1°. $z - x - y + a = y - x - z + b$, & réduiſant $2z - 2y = b - a$ (I).

2°. $z - x - y + a = x - y - z + c$, & réduiſant $2z - 2x = c - a$ (K).

3°. $z - x - y + a = x + y + z - d$, & réduiſant $2x + 2y = a + d$ (L).

On prend enſuite dans ces deux premieres équations réduites, la valeur de l'inconnue z, on a

$$z = \frac{2y + b - a}{2} \quad (M).$$

$$z = \frac{2x + c - a}{2} \quad (N).$$

Comparant enſemble ces deux valeurs de z, on a l'équation $\frac{2y + b - a}{2} = \frac{2x + c - a}{2}$; laquelle réduite, donne $2x - 2y = b - c$ (O). J'écris ſous ce dernier réſultat l'équation (L) $2x + 2y = a + d$,

& je prens dans l'une & dans l'autre la valeur de l'inconnue x, que je trouve pour la premiere $x = \frac{2y+b-c}{2}$ (P); & pour la ſeconde $x = -\frac{2y+a+d}{2}$ (Q): comme ces deux valeurs de x ſont diviſées l'une & l'autre par 2, on peut ſupprimer ce diviſeur; & comparant enſemble ces deux valeurs, on aura $2y+b-c = -2y+a+d$; d'où l'on tirera $4y = a-b+c+d$: & en diviſant les deux membres par 4, $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ (R), je ſubſtitue cette valeur de y dans les équations (M) & (P). Je tire de la premiere $z = -\frac{a+b+c+d}{4}$ (S), & de la ſeconde, j'ai $x = \frac{a+b-c+d}{4}$ (T): je ſubſtitue enfin dans l'équation (E) à la place de x, y, z, les valeurs que nous avons trouvées dans les équations (R), (S), (T); ce qui donne $u = \frac{a+b+c-d}{4}$ (X).

Troiſiéme méthode.

Il arrive quelquefois qu'en ajoutant enſemble, ou qu'en retranchant les unes des autres, les équations qui expriment les

conditions d'un problême, on parvient plutôt à dégager les inconnues. Reprenons les équations qui expriment les conditions du problême :

$$u+x+y=z+a \ (A)$$
$$u+x+z=y+b \ (B)$$
$$u+y+z=x+c \ (C)$$
$$x+y+z=u+d \ (D).$$

Je prens la valeur de u dans chacune de ces équations ; ce qui me donne les ſuivantes :

$$\left.\begin{array}{l} u=z-x-y+a \\ u=y-x-z+b \\ u=x-y-z+c \\ u=x+y+z-d \end{array}\right\} \text{E.}$$

Je comprens ces quatre valeurs ſous une même lettre.

En ajoutant enſemble ces équations, on a $4u=a+b+c-d$, & $u=\frac{a+b+c-d}{4}$ (F).

Je prens dans chacune des équations primitives la valeur de x, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x=z-u-y+a \\ x=y-u-z+b \\ x=u+y+z-c \\ x=u-y-z+d \end{array}\right\} \text{G.}$$

J'ajoute ces quatre valeurs x; ce qui donne $4x = a + b - c + d$, & $x = \frac{a+b-c+d}{4}$ (H).

Je fais la même choſe pour avoir la valeur de y; j'ai les quatre équations :

$$\left.\begin{array}{l} y = z - u - x + a \\ y = u + x + z - b \\ y = x - u - z + c \\ y = u - x - z + d \end{array}\right\} \text{I.}$$

Deſquelles je tire par l'addition $4y = a - b + c + d$, & $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ (K).

Enfin pour z j'ai

$$\left.\begin{array}{l} z = u + x + y - a \\ z = y - u - x + b \\ z = x - u - y + c \\ z = u - x - y + d \end{array}\right\} \text{L.}$$

Deſquelles on tire par l'addition $4z = -a + b + c + d$ & $x = -\frac{a+b+c+d}{4}$ (M).

Suppoſant $a = 50$, $b = 40$, $c = 30$, $d = 20$, on trouvera la valeur de $u = 25$, celle de $x = 20$, celle de $y = 15$, enfin celle de $z = 10$.

SCHOLIE.

Lorſque le nombre des équations qui

expriment les différentes conditions d'un problême, eſt moindre que le nombre des inconnues qu'on a employées pour leur réſolution ; c'eſt-à-dire, que lorſque le problême eſt indéterminé, l'équation derniere à laquelle on parvient, renferme toujours pluſieurs inconnues. Pour avoir la ſolution d'un tel problême, il faut regarder toutes les inconnues, à l'exception d'une ſeule, comme ſi elles étoient toutes connues, & ſubſtituer à leur place différentes valeurs arbitraires. Suppoſons, par exemple, que dans la réſolution d'un problême indéterminé, on trouve pour équation $z = \frac{a-x}{x-b}$, laquelle renferme deux inconnues x & z. On ſubſtituera ſucceſſivement différentes valeurs, en obſervant que ſi les valeurs de z ſont poſitives, il faudra ſubſtituer à la place de x des valeurs plus grandes que b, à cauſe du dénominateur $x-b$.

On peut ſouvent diminuer le nombre des équations qui expriment les conditions d'un problême, en ſe ſervant de quelques-unes de ces conditions pour diminuer le nombre des inconnues qu'il faudroit employer pour la ſolution de ce problême. La queſtion ſuivante peut ſervir d'exemple.

Trouver trois nombres tels que les ſommes $= a$, que le plus grand ſurpaſſe le

moyen d'une quantité $= b$, & que le moyen ſurpaſſe le plus petit d'une grandeur $= c$.

Solution.

Soit x le plus grand des trois nombres, on aura, ſuivant la ſeconde & la troiſiéme condition, $x - b$ pour le moyen, & $x - b - c$ pour le plus petit : cela poſé, la premiere condition du problême donnera l'équation $x + x - b + x - b - c = a$; d'où l'on tirera $3x = a + 2b + c$, & $x = \frac{a+2b+c}{3}$. Si on ſuppoſe $a = 100$, $b = 24$, $c = 20$, on trouvera le plus grand nombre $x = 56$, le moyen $x - b = 32$, & le plus petit $x - b - c = 12$.

PROBLEME.

Partager un nombre donné a, en trois parties proportionnelles aux grandeurs données m, n, p.

Solution.

Soit $x =$ la premiere partie du nombre a, puiſque cette premiere partie doit être à la ſeconde, comme $m : n$; on aura la ſeconde partie $= \frac{nx}{m}$; de même, puiſque la premiere partie doit être à la troiſiéme com-

me $m:p$, on aura la troiſiéme $=\frac{px}{m}$; mais par les conditions du problême, les trois parties cherchées ſont égales à a, on aura donc l'équation $x+\frac{ux}{m}+\frac{px}{m}=a$; & en faiſant évanouir les fractions $mx+nx+px=am$, & diviſant chaque membre par $m+n+p$, on aura $x=\frac{am}{m+n+p}$: faiſant $a=180$, $m=5$, $n=3$, $p=2$, x ſera $=90$, $\frac{nx}{m}=54$, $\frac{px}{m}=36$.

La Phyſique nous apprend, d'après l'expérience, qu'un corps ſolide, plongé dans un fluide, perd de ſon poids autant que peſe un pareil volume du fluide dans lequel on le plonge; que ſi un volume d'eau du poids de quinze livres, eſt égal au volume d'un corps quelconque du poids de cent livres, ce dernier, plongé dans le fluide, ne peſera plus que quatre-vingt-cinq livres; d'où il ſuit que ſi on prend un poids égal de différens métaux, d'or, par exemple, d'argent, &c. le plus peſant de ces métaux perdra moins de ſon poids, puiſqu'il occupera un moindre volume, relativement

lativement à celui qui eſt moins peſant. Cela poſé, il eſt facile de réſoudre un problême fameux, connu ſous le nom de problême d'Archiméde.

PROBLEME.

Un ouvrage fait d'un mêlange d'or & d'argent étant propoſé, déterminer, ſans endommager l'ouvrage, la quantité d'or & la quantité d'argent qui le compoſent.

Solution.

Soit p le poids de l'ouvrage propoſé; x la quantité inconnue d'argent. Ayant pris deux lingots, l'un d'or, l'autre d'argent, égaux chacun en peſanteur au poids de l'ouvrage p; on peſera ces trois corps en les plongeant dans l'eau, pour connoître la quantité qu'ils perdent chacun de leur poids : ſoit a la quantité que le lingot d'or a perdu, & b celle que l'argent a perdu, c la quantité que l'ouvrage compoſé des deux métaux, a perdu, on aura a plus petit que b, & c plus petit que b; cela poſé, on dira: le poids p du lingot d'or eſt à la quantité x mêlée dans l'ouvrage, comme la perte a que le lingot d'or a fait de ſon poids dans l'eau, eſt à la perte qu'a fait la quantité d'or mêlée dans l'ouvrage, cette perte ſera $\frac{ax}{p}$.

Le poids p du lingot d'argent eſt à la quantité y d'argent mêlée dans l'ouvrage, comme la perte b que le lingot d'argent a fait dans l'eau, eſt à la perte qu'a fait la quantité d'argent mêlée dans l'ouvrage; l'expreſſion de cette perte ſera $\frac{by}{p}$; ceci poſé, la quantité x d'or & la quantité y d'argent mêlée dans l'ouvrage (hypothèſe), forment enſemble le poids p de l'ouvrage propoſé, on aura par conſéquent cette premiere équation $x+y=p$ (A), de plus la perte que la quantité d'or & la quantité d'argent mêlées dans l'ouvrage, ont fait chacun de leur poids dans l'eau, compoſant enſemble la perte totale c qu'a fait l'ouvrage propoſé, on a donc pour ſeconde équation $\frac{ax}{p}+\frac{by}{p}=c$ (B), je prens dans l'équation (A) la valeur de y & j'ai $y=p-x$ (C), je ſubſtitue cette valeur de y à ſa place dans l'équation (B), ce qui donne $ax+bp-bx=cp$, & en tranſpoſant $bp-cp=bx-ax$, d'où l'on tire $x=\frac{bp-cp}{b-a}$ (D); ſi on ſuppoſe que le poids p de l'ouvrage ſoit de 10 livres, que l'or perde la dix-huitiéme partie de ſon poids dans l'eau, c'eſt-à-dire, que a ſoit $=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$; que l'argent perde la dixié-

me partie de ſon poids dans l'eau, c'eſt-à-dire, une livre par dix livres; b qui repréſente cette perte, ſera égal à $\frac{10}{10}$ de livres, c'eſt-à-dire, à une livre. Suppoſons encore que l'ouvrage propoſé perd de ſon poids dans l'eau les $\frac{2}{3}$ d'une livre, on aura $c = \frac{2}{3}$; pour lors en ſubſtituant dans l'équation (A) à la place des lettres a, b, c, p, leurs valeurs $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{10}$, on aura $x = \frac{1 - \frac{2}{3} \times 10}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{\frac{3 - 2 \times 10}{3}}{\frac{9 - 5}{9}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{10 \times 9}{4 \times 3} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}$: or comme $y = p - x$ ou $10 - 7\frac{1}{2} = 2$ livres $\frac{1}{2}$; ce qui fait connoître que l'ouvrage propoſé eſt compoſé de 7 livres $\frac{1}{2}$ d'or, & de 2 livres $\frac{1}{2}$ d'argent.

Exemples du ſecond degré.

PROBLEME.

Trouver deux nombres dont on connoît la ſomme & le produit.

Soit la ſomme $= s$, le produit $= p$, le premier nombre $= x$, le ſecond $= y$, par les conditions du problême

$$x + y = s = 240$$
$$xy = 0\ p = 5184.$$

Je prens la valeur de x dans la premiere

équation, & j'ai $x = s - y$, je ſubſtitue cette valeur de x dans la ſeconde équation, en obſervant que y eſt multiplié par x, ce qui me donne $sy - yy = b$, je change cette équation en $yy - sy = -b$ par la tranſpoſition; car $sy = b + yy$: donc $sy - b = yy$, tranſpoſant sy, j'aurai $-b = yy - sy$; cette équation eſt du ſecond degré, 1°. parce que l'inconnue eſt élevée au quarré. 2°. Parce qu'il y a dans cette équation pluſieurs puiſſances de l'inconnue. Je remarque 3°. que le ſecond membre contient un quarré incomplet, j'ajoute à chaque membre ce qui manque pour le rendre complet; c'eſt-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient $2s$ qui multiplie y, ce qui donne $\frac{1}{4}s^2 - b = yy - sy + \frac{1}{4}s^2$, & extrayant la racine quarrée de chaque membre $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - b} = y - \frac{1}{2}s$; enfin $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - b}$, faiſant les ſubſtitutions néceſſaires, on trouvera $x = 24$ & $y = 216$.

Dans les équations que nous avons examinées juſqu'à préſent, l'inconnue n'étoit élevée qu'à la premiere ou à la ſeconde puiſſance; nous allons maintenant conſidérer les équations compoſées, celles dont tous les termes ont pour facteurs différentes puiſſances de l'inconnue.

Il ne s'agit ici que des équations qui renferment une ſeule inconnue élevée à différentes puiſſances dans leurs différens termes ; on aura lieu d'obſerver que l'inconnue a autant de valeurs particulieres qu'il y a d'unités dans le plus haut degré de l'inconnue. Il arrive ſouvent que quelques-unes des valeurs ſont imaginaires ou impoſſibles, il faut pour bien entendre ceci, faire attention à la maniere dont les équations peuvent être compoſées.

Je ſuppoſe que les équations ſur leſquelles on doit opérer, ont zéro pour ſecond membre, qu'elles ſont dégagées de toutes fractions, & qu'elles ne contiennent point de quantités incommenſurables, qu'elles ont l'unité pour coëfficient, & qu'elles ſont précédées du ſigne *plus*. Si quelques-unes avoient des coëfficiens différens de l'unité, on ſuivroit, pour les en dépouiller, la méthode que nous avons donnée ci-devant.

Dans la réſolution des équations, il arrive ſouvent d'avoir des grandeurs différentes dont les réſultats ſont cependant les mêmes que l'on multiplie; par exemple, $+a+b$ par $+a+b$, ou $-a-b$ par $-a-b$, il en réſultera le même produit $a^2+2ab+b^2$, il eſt des nombres différens qui, combinés de la même maniere,

donnent le même réſultat; un exemple rendra ceci ſenſible. Que l'on prenne, par exemple, celui des deux nombres $+2$ ou -5, que l'on voudra, on trouvera par le calcul que le cube de chacun de ces nombres ſéparés, moins dix-neuf fois ces mêmes nombres, plus 30 eſt égal à zéro. On peut conclure de-là que lorſque des grandeurs différentes auront les mêmes propriétés, & donneront le même réſultat, on pourra les déſigner par la même lettre; ſi on ſuppoſe ſéparément les nombres $+2$ & -5 par y, on aura dans les deux cas l'équation $y^3 - 19y + 30 = 0$; la lettre y repréſentera donc non-ſeulement les deux grandeurs dont nous venons de parler, mais elle repréſentera encore toute autre grandeur qui aura les mêmes propriétés.

Lorſqu'on multiplie les unes par les autres, pluſieurs équations qui ont la même inconnue, telle, par exemple, que $x - a = 0$, $x - c = 0$, on conſidere dans chaque équation la lettre x comme repréſentant la même valeur exprimée dans la premiere par la lettre a, & dans la ſeconde par la lettre b.

Les équations que nous aurons à traiter, ne renferment, comme je l'ai déja dit, qu'une ſeule inconnue élevée à différentes puiſſances dans leurs différens termes : il

faut obſerver que l'inconnue aura autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans le plus haut degré de l'inconnue. Il arrive ſouvent que quelques-unes des valeurs de l'inconnue ſont imaginaires ou impoſſibles; pour bien entendre ceci, examinons la maniere dont les équations peuvent être compoſées.

Soient les équations

$$x - a = 0$$
$$x - b = 0$$
$$x - c = 0,$$

leſquelles ſont la même choſe que

$$x = a$$
$$x = b$$
$$x = c.$$

Si je multiplie les deux premieres l'une par l'autre, j'aurai $x^2 - ax - bx + ab = 0$, ce produit multiplié par la troiſiéme $x - c = 0$, donnera l'équation compoſée

$$\begin{aligned} x^3 &- ax^2 + abx \\ &- bx^2 + acx - abc = 0 \quad (A) \\ &- cx^2 + bcx \end{aligned}$$

que je déſigne par la lettre A.

Suppoſons maintenant que l'on a les trois équations

$$x + a = 0$$
$$x + b = 0$$
$$x + c = 0$$

peuvent être converties en celles-ci :

$$x = -a$$
$$x = -b$$
$$x = -c.$$

Si on multiplie ces trois équations de la même maniere qu'on a multiplié les trois précédentes, on aura l'équation composée

$$\begin{aligned} &a^3 + a x^2 + a b x \\ &\quad + b x^2 + a c x + a b c = 0 \text{ (B).} \\ &\quad + c x^2 + b c x \end{aligned}$$

que je désigne par la lettre B.

Supposons enfin qu'on ait les trois équations

$$x - a = 0$$
$$x + b = 0$$
$$x + c = 0;$$

ces équations sont égales à celles-ci :

$$x = +a$$
$$x = -b$$
$$x = -c.$$

Opérant sur les trois équations de la même maniere que sur les précédentes, on aura l'équation composée

$$\begin{aligned} &x^3 - a x^2 - a b x \\ &\quad + b x^2 - a c x - a b c \text{ (C)} \\ &\quad \pm c x^2 \pm b c x \end{aligned}$$

leſquelles je déſigne par la lettre C.

Ces trois équations compoſées ne contiennent que la ſeule inconnue x, dont le plus haut degré eſt 3, elles contiennent, ces trois équations compoſées, chacune trois valeurs différentes ; x a donc dans ces trois cas trois valeurs ; c'eſt-à-dire, autant de valeurs que le plus haut expoſant contient d'unités : il en ſeroit de même de toute autre équation plus compoſée qui viendra de la multiplication de pluſieurs autres, & dont le ſecond membre ſera égal à zéro ; elles auroient toujours autant de valeurs pour l'inconnue, que l'expoſant le plus haut contient d'unités.

En examinant ces équations compoſées, on s'appercevra, 1°. que l'on prend pour un ſeul terme tous ceux dans leſquels l'inconnue x eſt élevée au même degré. 2°. Que l'on regarde comme premier terme celui où l'inconnue eſt élevée au plus haut degré ; pour ſecond terme, celui qui contient une puiſſance de l'inconnue d'un degré moindre ; enfin que l'on regarde comme le dernier terme celui qui ne contient point l'inconnue.

Une équation compoſée eſt dite complette, lorſquelle contient tous les degrés de puiſſances, depuis le plus élevé qui caracteriſe l'équation, juſqu'au moins élevé,

c'eſt-à-dire, juſqu'au degré zéro, ou juſqu'au terme qui ne contient point l'inconnue. Les équations A, B, C ſont dans ce cas-là. Mais s'il manque quelque puiſſance de l'inconnue entre la puiſſance la plus élevée & la moindre, l'équation eſt incomplette.

L'équation $y^3 + px - 1 = 0$, dans laquelle il manque le ſecond terme y^2, eſt une équation incomplette.

On donne aux équations particulieres dont une équation eſt compoſée, le nom de racines de l'équation compoſée.

Ces racines ſont ou toutes vraies ou toutes fauſſes; ou les unes vraies & les autres fauſſes.

On appelle racines vraies, celles dans leſquelles l'inconnue a une valeur poſitive.

On dit qu'une racine eſt fauſſe quand l'inconnue a une valeur négative.

Les racines de l'équation A ſont toutes vraies, parce qu'elle eſt compoſée de trois équations ſimples, dans leſquelles les valeurs de l'inconnue ſont poſitives; celles de l'équation B ſont toutes fauſſes, car les valeurs de x dans cette équation ſont toutes négatives.

Dans la troiſiéme équation, l'inconnue a une racine vraie & deux fauſſes; elle eſt en effet le réſultat de la multiplication des trois

équations $x-a=0$, $x+b=0$, & $x+c=0$; la premiere de ces équations a une valeur poſitive, les deux autres ont des valeurs négatives.

Les racines vraies ou fauſſes d'une équation ſe nomment racines réelles : les racines réelles ne ſont donc point oppoſées aux racines fauſſes? On donne le nom de racines réelles à celles qui ſont négatives ou poſitives; on les diſtingue en cela des racines imaginaires qui peuvent être auſſi vraies ou fauſſes, ſuivant que la valeur imaginaires de l'inconnue eſt poſitive ou négative.

On voit, d'après ce que nous avons dit, que les racines imaginaires ſont oppoſées aux racines réelles, comme les racines fauſſes le ſont aux vraies, & qu'une racine réelle, telle que $x=b$, & une imaginaire telle que $x=+\sqrt{-aa}$, étant toutes deux poſitives, ſont l'une & l'autre fauſſes. Il en eſt de même de la racine réelle $x=-b$, & de l'imaginaire $x=-\sqrt{-aa}$, leſquelles ſont dans le même cas, parce qu'elles ſont toutes deux des quantités négatives qui expriment la valeur de x.

La formation des équations compoſées nous apprend encore que, lorſque leurs

racines ſont égales à zéro, les équations réſultantes, ainſi que celles qui ſeront compoſées de la même maniere, peuvent être diviſées par l'inconnue de l'équation, moins ſa valeur ; elles auront par conſéquent pour diviſeur un binome compoſé de l'inconnue & de ſa valeur priſe avec un ſigne contraire. Prenons un exemple, la choſe deviendra plus ſenſible. Soit l'équation

$$\begin{aligned} y^3 - ay^2 + aby - abc &= 0 \\ - by^2 + bcy & \\ - cy^2 + acy. & \end{aligned}$$

Cette équation pourra être diviſée ſans reſte par une des équations compoſante $y - a = 0$, $y - b = 0$, $y - c = 0$, &c. Si une équation eſt donc diviſible ſans reſte par l'inconnue y, plus ou moins une certaine quantité, priſe comme nous l'avons dit, avec un ſigne contraire, ce ſecond membre du binome ſera une des valeurs de l'inconnue, & par conſéquent une des racines de l'équation.

Si on ſubſtitue dans une équation compoſée une de ces racines, celle que l'on voudra, à la place de l'inconnue, en donnant le ſigne + à la racine poſitive que l'on ſubſtitue, & le ſigne — ſi la quantité à laquelle on veut ſubſtituer, eſt précédée de

ce ſigne, tous les termes de l'équation ſe détruiront. Soit l'équation

$$\begin{aligned} y^4 - ay^3 + aby^2 - abcy + abcd\ (K). \\ - by^3 + acy^2 - abdy \\ - cy^3 + ady^2 - acdy = o \\ - dy^3 + bcy^2 - bcdy \\ + bdy^2 \\ + cdy^2, \end{aligned}$$

laquelle réſulte de la multiplication des quatre équations ſimples $x - a = o\ (F)$, $x - b = o\ (G)$, $x - c = o\ (H)$, $x - d = o = (I)$.

En effet, dans l'équation (F) faiſant $x = -a$; ſi on met, à la place de x dans tous les termes qui la contiennent, ſa valeur a, on trouvera que tous les termes de l'équation ſe détruiſent mutuellement; nous pouvons donc conclure de-là que l'inconnue d'une équation repréſente chacune des racines de l'équation, c'eſt une ſuite de ce qu'en ſubſtituant chacune des valeurs de cette inconnue à ſa place, les termes de l'équation ſe détruiſent toujours.

D'après les obſervations que nous avons faites ſur la nature des équations compoſées, nous ferons remarquer que toute équation compoſée eſt le réſultat de la multiplication de pluſieurs équations ſimples; qu'ainſi une équation du ſecond de-

gré doit être enviſagée comme le réſultat de la multiplication de deux équations ſimples : par exemple, l'équation $y^2 - px + q = o$ (M) peut être conſidérée comme le réſultat de la multiplication de deux équations du premier degré ; & pour le démontrer, ſoit les deux équations du premier degré $y - a = o$, $y - b = o$, leſquelles multipliées l'une par l'autre, donnent l'équation

$$\begin{aligned} y^2 - ay + ab &= o \quad (P) \\ - by ; & \end{aligned}$$

on réduira cette équation à l'équation M. Si en ſuppoſant $-a-b=-p$ & $+ab = +q$, on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (P). Avons-nous l'équation du troiſiéme degré

$$y^3 + py^2 + qy + r = o \quad (Q)$$

qui eſt une formule avec laquelle on peut repréſenter toutes les équations du troiſiéme degré ; elle eſt donc égale à la ſuivante :

$$\begin{aligned} y^3 + ay^2 + aby + abc &= o \quad (R) \\ + by^2 + acy & \\ + cy^2 + bcy. & \end{aligned}$$

Cette équation eſt compoſée des équations ſimples $y + a = o$, $y + b = o$,

$y+c=0$; or ſi on ſuppoſe dans cette équation les coëfficiens $a+b+c=p$, & les coëfficiens $ab+ac+bc=q$, & le terme $a+b+c=r$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation R, elle deviendra l'équation (Q).

Toute équation compoſée peut donc être enviſagée comme étant le produit d'autant d'équations ſimples que l'inconnue a de degrés ; ainſi une équation du ſecond degré eſt le réſultat de la multiplication de deux équations ſimples : on peut en dire autant de celles du troiſiéme, du quatriéme degré, &c. mais celles-ci peuvent être enviſagées d'une autre maniere ; celle du troiſiéme degré, par exemple, peut être regardée comme le produit d'une équation du ſecond degré par une équation du premier; un exemple rendra ceci ſenſible. Soit l'équation $y^2-3y+8=0$ & l'équation $y-4=0$.

Si l'on multiplie ces équations l'une par l'autre, on aura l'équation du troiſiéme degré

$$y^3-7y^2+20y-32=0.$$

Une équation du quatriéme degré pourra être enviſagée, 1°. comme le réſultat de la multiplication de quatre équations ſimples, multipliées les unes par les au-

tres ; ou, 2°. comme le produit d'une équation du troiſiéme degré par une équation du premier degré ; ou, 3°. enfin, comme le réſultat d'une équation du ſecond degré, multiplié par une équation du premier degré.

Venons maintenant à la transformation des équations compoſées. Transformer une équation, c'eſt la changer en une autre dont l'inconnue ait, avec celle de la premiere, un rapport connu, l'équation nouvelle ſe nomme la transformée. Propoſe-t-on, par exemple, de changer une équation telle que $y^2 + py - q = 0$, que je déſignerai par (S), en une autre, dont l'inconnue ſoit égale à celle de l'équation (S), plus une grandeur connue a ; nommant l'inconnue de l'équation que je veux former (z), d'après la ſuppoſition que j'ai faite, j'aurai l'équation $y + a = z$; donc $y = z - a$; je ſubſtitue cette valeur de y dans l'équation à transformer ; ce qui me donne l'équation

$$z^2 - 2az + a^2 + pz - pa - q = 0.$$

Veut-on ôter le ſecond terme d'une équation compoſée ; ou, ce qui eſt la même choſe, veut-on transformer cette équation compoſée en une autre, dont le ſecond

cond terme s'évanouiſſe, on ſuppoſera l'inconnue de l'équation propoſée égale à une autre inconnue, plus, ou moins une fraction qui aura pour numérateur le coëfficient du ſecond terme de l'équation propoſée, & pour dénominateur, l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue, & l'on donnera à cette fraction le ſigne +, ſi le ſecond terme eſt précédé du ſigne —, & — ſi c'eſt le ſigne +; on ſubſtituera enſuite cette valeur à la place de l'inconnue dans l'équation dont on veut ôter le ſecond terme, on aura, par les opérations, une équation transformée telle qu'on la demande.

Soit propoſé de transformer l'équation

$$y^2 + py - q = 0 \text{ (T)};$$

je ferai $y = z - \frac{p}{2}$, ſubſtituant cette valeur de y à ſa place dans l'équation (T), on aura $z^2 - pz + \frac{p^2}{4} = 0$;

$$+pz - \frac{p^2}{2}$$
$$- q$$

réduiſant cette équation, elle devient $z^2 - \frac{p^2}{4} - q = 0$, le ſecond terme eſt évanoui.

Si l'on propoſoit de réduire à l'unité

le coëfficient du premier terme d'une équation compoſée qui ne renfermeroit point de fraction, on ſuppoſeroit l'inconnue de l'équation propoſée égale à une autre inconnue qui ſeroit diviſée par le coëfficient du premier terme de l'équation propoſée, on ſubſtitueroit cette nouvelle valeur à la place de l'inconnue; ce qui donneroit une ſeconde équation dans laquelle on feroit évanouir la fraction qu'elle contient, il réſulteroit une troiſiéme équation qu'il faudroit diviſer par le coëfficient de ſon premier terme. Soit l'équation

$$ay^3 + py^2 + qy - r = 0 \text{ (V)}:$$

je ſuppoſerai $y = \frac{z}{a}$; ſubſtituant cette valeur de y dans l'équation (V), j'ai la ſeconde équation

$$\frac{az^3}{a^3} + \frac{pz^2}{a^2} + \frac{qz}{a} - r = 0 \text{ (X)}:$$

je fais évanouir les fractions, j'ai la nouvelle équation

$$az^3 + apz^2 + a^2qz - a^3r = 0 \text{ (Y)};$$

je diviſe tous les termes du premier terme par a, j'ai une troiſiéme équation

$$z^3 + pz^2 + aqz - a^2r = 0, \text{ \&c.}$$

dans laquelle le premier terme n'a plus de coëfficient.

Il nous reſte maintenant à faire voir comment on trouve les racines commenſurables des équations compoſées, & d'indiquer la maniere de réduire au plus ſimple degré celles des équations compoſées qui n'ont point de racines commenſurables.

Une équation compoſée eſt réductible, lorſqu'elle eſt exactement diviſible par une autre équation plus ſimple; par exemple, l'équation $z^3 - 2z^2 - 5z + 10 = 0$, eſt réductible; car on peut la diviſer ſans reſte par les équations $z^2 - 5 = 0$, & $z - 2 = 0$, dont elle eſt le produit. Une équation compoſée eſt irréductible, lorſqu'elle n'eſt pas exactement diviſible, par une autre équation plus ſimple; telle eſt, par exemple, l'équation $y^2 - 5 = 0$. Pour peu qu'on y faſſe attention, on remarquera que toute équation compoſée réductible, réſulte du produit de pluſieurs équations irréductibles.

Pour trouver toutes les racines commenſurables contenues dans une équation compoſée, on cherchera tous les diviſeurs du dernier terme de l'équation propoſée, & on ſubſtituera ſucceſſivement dans cette équation chacun de ces diviſeurs à la place

de l'inconnue, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un diviſeur avec lequel on détruiſe par la ſubſtitution tous les termes de l'équation, ce diviſeur ſera une racine commenſurable de l'équation propoſée. Dans ce cas, on diviſera l'équation propoſée par l'inconnue, moins la racine qu'on aura trouvée, & l'on aura une nouvelle équation plus ſimple que la propoſée, on opérera ſur cette nouvelle équation, & l'on continuera juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à une nouvelle équation qu'on ne puiſſe plus abaiſſer. Si l'équation qui reſte eſt compoſée, ce problême eſt réſolu ; ſi au contraire elle eſt ſimple, il faudra faire paſſer toutes les grandeurs connues dans un membre, & l'on aura par ce moyen la derniere racine qu'il falloit trouver. Si on ne trouve point de diviſeur qui ait cette propriété, on en conclura que l'équation n'a point de racines commenſurables.

Soit l'équation du quatriéme degré $z^4 - 5z^3 + z^2 + 25z - 30 = 0$: je cherche d'abord tous les diviſeurs du dernier terme -30, que je trouve être $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 5 \pm 6 \pm 10 \pm 15 \pm 30$, je ſubſtitue ſucceſſivement chacun de ces nombres à la place de z dans l'équation propoſée, j'eſſaye d'abord le terme $+1$; & comme

tous les termes de l'équation compoſée ne ſe détruiſent pas, je conclus que $+1$ n'eſt pas une racine de cette équation; j'eſſaye de même -1, j'ai le même réſultat, je ſubſtitue $+2$; l'opération faite, je trouve que ce nombre eſt une racine de l'équation propoſée; c'eſt pourquoi je la diviſe par $z-2$, & j'ai pour quotient

$$z^3 - 3z^2 + 5z + 15 = 0;$$

je diviſe cette nouvelle équation; je remarque qu'elle n'eſt pas diviſible par $+2$, c'eſt pourquoi je tente la diviſion par $z-3$, il reſte $z^2 - 5 = 0$; j'eſſaye de nouveau les diviſeurs ſur cette derniere équation: & comme je n'en trouve aucun par lequel elle ſoit diviſible, je conclus qu'elle n'a point de racines commenſurables; d'après cela je conclus que l'équation n'a d'autres racines commenſurables, que les nombres $+2$ & $+3$ dont je me ſuis ſervi.

Toute la théorie des équations compoſées eſt renfermée dans les réflexions ſuivantes, qu'il faut ſe rendre bien familieres.

Nous avons déja dit qu'il étoit poſſible d'avoir pluſieurs équations dans leſquelles on repréſente par une même lettre toutes les inconnues; & qu'en multipliant ſucceſſi-

vement ces équations les unes par les autres, leur produit ſeroit égal à zéro, ſi les ſeconds membres des équations qui ſervent de facteurs, ſont égaux à zéro. Que ſi on regarde le produit de ces multiplications comme le premier membre d'une équation; en ſuppoſant le ſecond membre égal à zéro; la lettre qu'on aura choiſie pour déſigner les inconnues, repréſentera également la valeur de chacune des quantités connues qui ſont égales à la lettre choiſie; ainſi en ſuppoſant deux équations telles que

$$x - a = 0$$
$$x - b = 0,$$

dans leſquelles on ſuppoſe $x = +a$ & $x = +b$; ces deux équations, multipliées l'une par l'autre & termes par termes, donneront pour produit

$$xx - ax + ab = 0$$
$$- bx;$$

mais en conſidérant ce produit comme le premier membre d'une équation, la lettre x qui repréſente l'inconnue, déſignera également les valeurs que les quantités a & b avoient dans les équations qui ſervent de facteur, & cette inconnue n'en aura point d'autres; en effet, ſuppoſons

pour un inſtant que la lettre x des équations $x - a = 0$, $x - b = 0$ repréſente dans chacune des deux, lorſqu'on les multiplie l'une par l'autre, la valeur de la grandeur $+a$ qu'elle a dans la premiere, qu'ainſi les expreſſions $x - a$ & $x - b$, ſont équivalentes à ces deux $+a - a$ & $+a - b$; cela conſidéré, il eſt évident que

$$\begin{array}{l} x\,x - a\,x + a\,b \\ \qquad - b\,x \end{array}$$

qui eſt la même choſe que $\overline{x - a} \times \overline{x - b}$, ou que $\overline{+a - b} \times \overline{+a - b} = a\,a - a\,a + a\,b - a\,b = 0$; d'où il ſuit que

$$\begin{array}{l} x\,x - a\,x + a\,b = 0 \\ \qquad - b\,x. \end{array}$$

Suppoſons maintenant $x = +b$, valeur à laquelle on l'a égalée dans la ſeconde équation, on trouvera encore pour réſultat

$$\begin{array}{l} x\,x - a\,x + a\,b = 0 \\ \qquad - b\,x; \end{array}$$

que ſi nous conſidérons

$$\begin{array}{l} x\,x - a\,x + a\,b \\ \qquad - b\,x \end{array}$$

ſimplement comme l'expreſſion de plu-

ſieurs grandeurs, leſquelles jointes enſemble, ſont égales à zéro, ſi x marque une grandeur inconnue, cette inconnue aura chacune des deux valeurs $+a$ & $+b$ dans l'équation ſuppoſée

$$\begin{array}{c} xx - ax + ab = 0 \\ - bx, \end{array}$$

comme il eſt aiſé de s'en convaincre en les ſubſtituant à la place de x, parce que toutes les grandeurs qui la compoſent ſe détruiſent, & qu'on trouve le même réſultat que ci-deſſus; il eſt même impoſſible que x puiſſe avoir dans l'équation ſuppoſé

$$\begin{array}{c} xx - ax + ab \\ - bx \end{array}$$

d'autres valeurs que $+a$ ou $+b$; en voici la raiſon : ſuppoſons qu'une autre grandeur, quelle qu'elle ſoit, différente de $+a$ & $+b$, ſoit nommée x, il eſt clair que $x - a$ & $x - b$, ſeront l'une & l'autre différentes de zéro, leur aſſemblage ne ſera pas alors compoſé de quantités qui ſe détruiſent; par conſéquent le réſultat ne ſera pas le même.

Nota. Les valeurs qu'a l'inconnue dans une équation compoſée qui réſulte de la

multiplication de pluſieurs équations ſimples; ces valeurs, qui ſont les racines des équations ſimples, le ſont auſſi de l'équation compoſée. Dans les équations précédentes on a ſuppoſé que x avoit pour valeur chacune des quantités a, b, c. Ces quantités, qui ſont les racines des équations ſimples, le ſont auſſi de l'équation compoſée qui eſt réſultée de leur multiplication.

Ces racines ſont réelles, lorſqu'elles repréſentent des grandeurs poſſibles, ſoit que ces grandeurs ſoient négatives, ſoit qu'elles ſoient poſitives; ſi elles repréſentent des grandeurs impoſſibles, on leur donne le nom des grandeurs imaginaires. L'équation $y^2 - 36 = 0$, donne par la tranſpoſition $y^2 = 36$ & $y = \pm 6$: les racines plus ou moins 6 ſont réelles; ſi au contraire on ſuppoſoit $y^2 = -36$, alors y ſera égale à $\pm \sqrt{36}$; dans ce cas ces deux racines ſeroient imaginaires, les racines réelles d'une équation ſont néceſſairement commenſurables ou incommenſurables; il y a plus, celles qui ſont incommenſurables peuvent être ſimplement incommenſurables ou être mixtes, c'eſt-à-dire, compoſées d'une grandeur commenſurable & de grandeurs incommenſu-

rables; par exemple, ſi on multiplie les équations $y - c - \sqrt{d} = 0$, $y - c + \sqrt{d} = 0$, on aura l'équation compoſée $y^2 - 2cy - cc - d = 0$, de laquelle on tire $x = c + \sqrt{d}$, $x = c - \sqrt{d}$; mais cette équation compoſée a, comme l'on voit, deux racines mixtes.

J'obſerverai encore que la racine imaginaire d'une équation peut être compoſée d'une grandeur réelle & de grandeurs imaginaires, ou être ſimplement imaginaires; dans le premier cas elle eſt mixte: les équations $z - \sqrt{-36} = 0$, $z + \sqrt{-36} = 0$, deſquelles on tire $z = +\sqrt{-36}$, & $z = -\sqrt{-36}$, ſont purement des racines imaginaires. Si on multiplie les équations ſimples $z + 3 - \sqrt{-25} = 0$, $z + 3 + \sqrt{-25} = 0$; on aura l'équation compoſée $z^2 + 6z + 34$, laquelle contient les deux racines imaginaires mixtes qui ont ſervi de facteurs.

On voit d'après ce que nous avons dit, qu'on peut regarder ces deux manieres de parler, les racines d'une équation, les valeurs de ſon inconnue, comme des expreſſions ſynonymes.

L'inconnue d'une équation compoſée

peut avoir autant de valeurs inégales que l'équation a de degrés, mais elle n'en peut avoir davantage.

Quand toutes les racines d'une équation compoſée ſont réelles & poſitives, tous les termes de l'équation ont alternativement les ſignes + & — ; ſi au contraire toutes les racines d'une équation compoſée ſont négatives : tous les termes de l'équation ont le ſigne +.

Toute équation d'un degré impair a toujours une racine réelle : or cette racine eſt poſitive, lorſque le dernier terme de l'équation eſt négatif ; au contraire, elle eſt négative lorſqu'il eſt poſitif. Soit l'équation $y^3 + py - q = 0$, dans laquelle le dernier terme $-q$ eſt une quantité négative ; cette équation a une racine réelle poſitive ; en effet, enviſageons cette équation comme une expreſſion de grandeurs, & la lettre y comme repréſentant dans cette expreſſion une grandeur réelle poſitive quelconque : lorſque la grandeur y eſt infiniment petite, les quantités y^3 & py peuvent être regardées comme nulles à l'égard de q ; ainſi l'expreſſion $y^3 + py - q$ repréſente une grandeur négative. Si y eſt infinie py & q ſont cenſées nulles, relativement à y^3 ; dans ce cas-là $y^3 + py - q$

eſt l'expreſſion d'une grandeur poſitive. Toute expreſſion ſemblable qui n'auroit point une des deux conditions dont nous venons de parler, ſeroit égale à zéro : il ſuit de-là que l'équation $y^3+py-q=0$ a une racine réelle & poſitive. En raiſonnant de la même maniere, on verra que toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme eſt négatif, a néceſſairement deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative.

Ces principes bien conçus, il ſera facile de réſoudre les équations compoſées ; c'eſt ce que je vais faire par rapport aux équations du ſecond & du troiſiéme degré.

Soit propoſé de trouver les deux racines d'une équation quelconque du ſecond degré, par exemple de l'équation

$$y^2+py+q=0 \text{ (A)},$$

Dans laquelle les lettres p, q, déſignent grandeurs réelles telles que l'on voudra, on peut par conſéquent regarder cette équation comme pouvant repréſenter toutes les équations du ſecond degré dont on devra trouver les racines. Pour parvenir à trouver les racines, je fais paſſer dans le ſecond membre la quantité $+q$; ce qui me donne l'équation ſuivante

$$y^2 + py = -q.$$

Je complette cette équation, en ajoutant à chaque membre ce qui manque au premier pour achever le quarré, c'eſt-à-dire, que j'ajoute la quantité $\frac{1}{4}pp$, quarré de la moitié du coëfficient du ſecond terme, l'équation devient alors

$$y^2 + py + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{4}pp - q.$$

J'eſſaye d'extraire la racine quarrée de chaque membre, ce qui donne $y + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, ou $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, (B).

Veut-on avoir les deux racines d'une équation donnée du ſecond degré, il faut ſubſtituer dans l'équation (B), les grandeurs qui ſe trouvent dans l'équation particuliere à la place des lettres p & q, que ces grandeurs repréſentent. Si l'on avoit, par exemple, l'équation $y^2 - 8y + 15 = 0$, on ſubſtitueroit à la place de la grandeur p la quantité -8, & à la place de q la quantité $+15$, ce qui donneroit $y = +4 \pm \sqrt{16 - 17} = 4 \pm 1 = \begin{matrix} +5 \\ +3 \end{matrix}$.

Quant aux équations du troiſiéme degré, voici la méthode qu'il faudra ſuivre. Soit propoſé de réſoudre une équation du troiſiéme degré.

On commencera à dégager l'équation de ſon ſecond terme ſi elle en a un, comme on l'a enſeigné ci-devant. Soit l'équation ainſi dégagée de ſon ſecond terme, égale à la ſuivante :

$$y^3 + py + q = 0 \text{ (C)}.$$

Suppoſant $y = z - \frac{p}{3z}$ (D), j'introduis cette valeur dans l'équation (C); ce qui me donne

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0;$$

je multiplie le premier membre de cette équation par z^3, j'ai $z^6 - \frac{1p^3}{27} + qz^3 = 0$; j'ajoute de part & d'autre $\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}$, on a pour réſultat l'équation

$$z^6 + qz^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3;$$

extrayant la racine quarrée de chaque membre, on a l'équation

$$z^3 + \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3};$$

d'où l'on tire

$$z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3},$$

& en extrayant la racine cubique, on a enfin

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}};$$

que l'on ſubſtitue cette valeur de z dans l'équation (D), on aura pour réſultat

$$y = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}} \text{ (E).}$$

Quand les trois racines de l'équation (B) ſont inégales & réelles, la grandeur $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ eſt négative, on peut donc en conclure qu'alors l'équation (E) renferme des quantités imaginaires. En ſuppoſant toujours que les trois racines ſont réelles, ſi les grandeurs $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = 0$ ſont égales, alors on ne tire de l'équation (E) que la troiſiéme racine.

L'équation (B) renferme-t-elle deux racines imaginaires, alors la grandeur $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$ eſt poſitive, & l'équation (E) donne la racine réelle de l'équation (B). On remarquera que dans le premier cas la ſuppoſition $y = z - \frac{p}{3z}$, eſt impoſſible, parce que la plus petite des quantités repréſentées par $z - \frac{p}{3z}$ ſurpaſſe la plus grande des trois racines de y de l'équa-

tion (B). La ſuppoſition n'eſt poſſible dans le ſecond cas que par rapport à la troiſiéme racine de l'équation (B), mais elle ne renferme aucune contradiction dans le troiſiéme cas.

Nous ne nous étendrons point davantage; les perſonnes qui voudront approfondir cette matiere, peuvent conſulter les Elémens d'Algèbre de M. Clairaut, ceux de M. Bezout, la nouvelle édition des Leçons de M. l'Abbé de la Caille, & les différens Mémoires renfermés dans ceux de l'Académie Royale des Sciences, & des autres Académies.

Fin de l'Introduction.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS
D'ANALYSE PRATIQUE,

PREMIERE PARTIE.

Recueil de Problêmes numériques réſolus par Algebre.

Probleme premier.

Trouver le nombre au double duquel ajoutant 16, la ſomme ſoit 188.

Soluion.

Que x repréſente le nombre cherché, $2x$ en ſera le double, ainſi par la condition du problême $2x+16=188$.

Et en tranſpoſant $2x=188-16=172$.

Et en diviſant $x=\frac{172}{2}=86$.

PROBLEME II.

Trouver le nombre qui étant ajouté à 56, la ſomme ſoit triple de ce même nombre.

Solution.

Si x eſt le nombre cherché, $3x$ en ſera le triple, & par conſéquent $3x=x+56$ par la ſuppoſition, ainſi par tranſpoſition $2x=56$, & diviſant $x=\frac{56}{2}=28$.

PROBLEME III.

La ſomme de 155 liv. a été levée par trois différentes perſonnes A, B & C, dont B a avancé 15 liv. de plus que A, & C 20 liv. de plus que B, combien chacun a-t-il avancé?

Solution.

Soit x le nombre de livres avancé par A, alors $x+15$ eſt le nombre de livres avancé par B, & $x+35$ celui avancé par C.

Donc par la queſtion $3x+50=155$, ainſi $3x=105$, & $x=35$; ce qui fait voir que B a contribué 50 liv. & C 70 liv.

PROBLEME IV.

Une perſonne a laiſſé par teſtament 550 l. pour être diſtribuées entre quatre domeſti-

ques A, B, C & D; B doit avoir le double de A; C autant que A & B; & D autant que C & B: combien chacun aura-t-il?

Solution.

Soit x le nombre de livres de A, alors $2x$ eſt le nombre de livres de B, $3x$ celui de C, & $5x$ celui de D. Ainſi par la queſtion $11x=550$, & par conſéquent $x=\frac{550}{11}=50$.

Ainſi il ſera aiſé de déterminer les autres parts.

PROBLEME V.

On demande de partager le nombre 92 en quatre parties, de façon que la premiere ſurpaſſe la ſeconde de 10, la troiſieme de 18, & la quatrieme de 24.

Solution.

Si x eſt la premiere partie, alors $x-10$, $x-18$, $x-24$ ſeront les autres; & par la ſuppoſition $4x=52=92$; ainſi $4x=144$, $x=\frac{144}{4}=36$.

PROBLEME VI.

Une certaine ſomme d'argent doit être partagée entre cinq perſonnes, A, B, C, D, E; de maniere que B reçoive 10 liv. moins que A; C 16 liv. plus que B; D

5 liv. moins que C ; & E 15 liv. plus que D ; outre cela E doit recevoir autant que A & B enſemble. Quelle eſt la ſomme à partager, & combien chacun recevra-t-il ?

Solution.

Si x eſt la part de A, alors $x-10$, $x+6$, $x+1$, $x+16$ ſeront celles de B, C, D, E : donc par l'hypotheſe $x+16=2x-10$; ainſi $26=x$; les parts reſpectives ſont donc 26, 16, 32, 27 & 42 liv. & la ſomme totale 143 liv.

PROBLEME VII.

Trouver deux nombres dont la différence ſoit 7 & la ſomme 33.

Solution.

Soit x le plus petit nombre, alors $x+7$ ſera le plus grand, & $2x+7=33$: donc $2x=33-7=26$, & $x=\frac{26}{2}=13$ le plus petit ; ainſi $x+7=20$ le plus grand.

PROBLEME VIII.

Trouver le nombre dont le double ajouté à 24 ſurpaſſe autant 80, que 100 ſurpaſſe ce nombre.

Solution.

Soit x le nombre cherché ſelon les

conditions $2x+24-80=100-x$; ainſi $2x+x=100-24+80$, c'eſt-à-dire, $3x=156$, & par conſéquent $x=\frac{156}{3}=52$.

PROBLEME IX.

Diviſer le nombre 75 en deux parties, telles que trois fois la plus grande ſurpaſſe ſept fois la plus petite de 15.

Solution.

Si x eſt la plus grande partie, alors $75-x$ ſera la plus petite; & par la queſtion $3x=75-x\times 7+15$, c'eſt-à-dire, $3x=525-7x+15$: donc $10x=540$, & $x=54$; & ainſi la plus petite part $75-x=21$.

PROBLEME X.

A, après avoir gagné 10 guinées de B, en avoit ſix plus que lui, & ils avoient enſemble 40 guinées : combien chacun avoit-il avant de jouer ?

Solution.

Soit x le nombre de guinées que A avoit avant de jouer, alors $40-x$ ſera celui que B avoit : donc après le jeu, A avoit $x-10$ guinées ; & B, $30-x$; ainſi $x+10=30-x+6$ par la queſtion : donc $2x=26$, & $x=13$.

PROBLEME XI.

La ſomme de 500 liv. devoit être partagée entre quatre perſonnes, de façon que la premiere & la ſeconde enſemble euſſent 280 liv. la premiere & la troiſieme 260 liv. & la premiere & la quatrieme 220 liv. Combien chacun devoit-il avoir ?

Solution.

Si x déſigne le nombre de livres que devoit avoir la premiere, alors
la deuxieme devoit avoir . . . . $280-x$
la troiſieme . . . . . $260-x$
la quatrieme . . . . . $220-x$
& leur ſomme $760-2x=500$ par la queſtion ; ainſi $x=\frac{760-500}{2}=130$: donc les quatre parties ſont 130, 150, 130 & 90 liv. reſpectivement.

PROBLEME XII.

Diviſer 60 en deux parties, telles que la différence de la plus grande à 64, ſoit double de celle de la plus petite à 38.

Solution.

Si x eſt la plus grande partie, alors $60-x$ ſera la plus petite ; ainſi $64-x$ ſera la premiere différence, & $38-60+x$, la ſeconde :

donc $64-x=2\times x-22$ par la queſtion, ou $64-x=2x-44$, ainſi $108=3x$, & $x=36$.

PROBLEME XIII.

De deux tonneaux égaux, après avoir tiré de l'un 34 pots, & de l'autre 80, il reſtoit deux fois plus de liqueur dans le premier que dans le ſecond : combien chaque tonneau contenoit-il de pots étant plein ?

Solution.

Si x eſt le nombre de pots cherché, $x-34$ ſera ce qui reſtoit dans le premier tonneau, & $x-80$ ce qui eſt reſté dans le ſecond; ainſi par la queſtion $x-34=2\times x-80$, c'eſt-à-dire, $x-34=2x-160$: donc $126=x$,

PROBLEME XIV.

Un fils demandant à ſon pere quel étoit ſon âge, reçut de lui la réponſe ſuivante : votre âge il y a quatre ans, n'étoit que le quart du mien ; mais à préſent il en eſt le tiers : quel étoit l'âge de chacun ?

Solution.

Si x eſt l'âge du fils, celui du pere ſera $3x$; de plus $x-4$ étoit l'âge du fils, il y a

quatre ans, par la queſtion, & $3x-4$ celui que le pere avoit dans le même tems qui doit être quatre fois plus grand que $x-4$; ainſi on aura l'équation ſuivante $4x-16=3x-4$: donc $x=12$ & $3x=36$ ſeront les âges demandés.

PROBLEME XV.

Trouver le nombre dont le tiers ſurpaſſe de 16 le quart du même nombre.

Solution.

Soit x le nombre cherché, ainſi $\frac{x}{3}$ en eſt le tiers, & $\frac{x}{4}$ le quart; on aura donc $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=16$, & en réduiſant $4x-3x=192$, ou $x=192$.

PROBLEME XVI.

Dans un mêlange de vin & de cidre, on mit la moitié du tout, plus vingt-cinq pots de vin, & de cidre le tiers moins cinq pots : combien y avoit-il de pots de chacun ?

Solution.

Si le nombre des pots de tout le mêlange eſt x, celui des pots de vin ſera exprimé par $\frac{x}{2}+25$, & celui de cidre $\frac{x}{3}-5$: ainſi on

aura $\frac{x}{2}+25+\frac{x}{3}-5=x$, c'eſt-à-dire, $20=x+\frac{x}{2}-\frac{x}{3}$; ainſi $120=6x-3x-2x$, ou $120=x$. On voit donc que le mêlange contenoit 85 pots de vin, & 35 de cidre.

PROBLEME XVII.

Dans une loterie contenant 100000 billets, la moitié du nombre des lots ajoutée au tiers des billets blancs, faiſoit 35000 : combien y avoit-il de lots dans la loterie ?

Solution.

Si x eſt le nombre des lots, $100000-x$ ſera celui des billets blancs, & ainſi $\frac{x}{2}+\frac{100000-x}{3}=35000$: donc $3x+200000-2x=210000$, & $x=10000$ égal au nombre cherché.

PROBLEME XVIII.

Dans la compoſition d'une certaine quantité de poudre à canon, il falloit la moitié de tout le poids, plus ſix livres de ſalpêtre, un tiers moins cinq livres de ſoufre, & un quart moins trois livres de charbon : combien avoit-on pris de livres de chaque eſpece ?

Solution.

Si x eſt le poids de la compoſition ; $\frac{x}{2}+6$ étoit c qu'on avoit pris de ſalpêtre ; $\frac{x}{3}-5$ . . . . . de ſoufre , $\frac{x}{4}-3$ . . . . . de charbon ; donc par les conditions $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-2=x$; ainſi $12x+8x+6x-48=24x$, par conſéquent $x=\frac{48}{2}=24$: donc on a pris 18 livres de ſalpêtre, 3 de ſoufre & 3 de charbon.

PROBLEME XIX.

Un général , après avoir perdu une bataille , trouva qu'il lui reſtoit la moitié de ſon armée , plus 3600 hommes en état de combattre , un huitieme , plus 600 ayant été bleſſés, & le reſte qui étoit un cinquieme de toute l'armée, étant tué , pris priſonnier, ou déſerté : quel étoit le nombre de toute l'armée ?

Solution.

Le nombre cherché étant déſigné par x, le nombre de ceux qui peuvent encore combattre ſera $\frac{x}{2}+3600$, & celui des bleſſés $\frac{x}{8}+600$: à quoi ajoutant $\frac{x}{5}$ qui eſt le nom-

bre des tués, des priſonniers & des déſerteurs, on aura celui de toute l'armée, c'eſt-à-dire, $\frac{x}{2}+3600+\frac{x}{8}+600+\frac{x}{5}=x$: ainſi $4200=x-\frac{x}{2}-\frac{x}{8}-\frac{x}{5}$: donc $168000=15x-8x=7x$, & $x=24000$.

PROBLEME XX.

Un lot de 2000 liv. devoit être partagé entre deux perſonnes A & B, dont les parts devoient être en raiſon de 7 à 9 : quelles étoient la part de chacune ?

Solution.

Si x eſt la part de A, $2000-x$ ſera celle de B ; mais $x : 2000-x :: 7 : 9$ par la condition : ainſi le produit des extrêmes de quatre nombres en proportion, étant égal au produit des moyens, on aura l'équation $9x=2000-x\times 7$, c'eſt-à-dire, $9x=14000-7x$: ainſi $16x=14000$, & $x=875$: donc la part de A eſt 875 liv. & celle de B 1125 liv.

PROBLEME XXI.

Diviſer 44 en deux parties, telles que la plus grande augmentée de 5 puiſſe être à la plus petite augmentée de 7 comme 4 eſt à 3.

Solution.

Si x eſt la plus grande partie, $44-x$ ſera la plus petite, & par la condition $x+5 : 51-x :: 4 : 3$: donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $3x+15=204-4x$: ainſi $x=\frac{204-15}{7}=\frac{189}{7}=27$.

PROBLEME XXII.

Trouver deux nombres dans la raiſon de 1 à 2, de façon que 12 étant ajouté à chacun, les ſommes ſoient en raiſon de 5 à 7.

Solution.

Soit x le plus petit nombre, $2x$ ſera le plus grand : ainſi $x+12 : 2x+12 :: 5 : 7$ par la condition : donc $2x+12\times5=x+12\times7$, c'eſt-à-dire, $10x+60=7x+84$. d'où l'on tire $3x=24$, & $x=8$; de ſorte que les deux nombres ſont 8 & 16.

PROBLEME XXIII.

A commença par gagner au jeu cinq guinées à B, & en avoit alors autant que lui ; mais B ayant regagné ce qu'il avoit perdu, & cinq guinées de plus, en avoit cinq fois autant que A : combien avoient-ils chacun au commencement ?

Solution.

Si x eſt le nombre de guinées de A au commencement du jeu $x+10$ ſera ce qu'avoit B : ainſi $x+10+5=x-5\times5=5x-25$, c'eſt-à-dire, $40=4x$: donc $x=10$ eſt ce qu'avoit A, & $x+10=20$ ce qu'avoit B.

PROBLEME XXIV.

Un épicier vouloit mêler 56 livres de thé fin à 20 shillings la livre, avec une eſpece moindre à 14 shillings, de ſorte que la livre de mêlange puiſſe être vendue 18 shillings : quelle quantité falloit-il prendre de la derniere eſpece ?

Solution.

Si x eſt le nombre de livres demandé, alors 1120 shillings eſt la valeur de la plus fine eſpece, & $14x$ celle de la moindre ; de plus le nombre de livres des deux ſortes enſemble, étant $56+x$, il eſt évident que $56+x\times18$, ou $1008+18x$ eſt la valeur de tout le mêlange, par conſéquent $1120+14x=1008+18x$: ainſi $112=4x$: donc $28=x$.

PROBLEME XXV.

Un fermier vouloit mêler du froment à

4 liv. le ſeptier avec du ſeigle à 2 liv. 6 ſols, de ſorte que tout le mêlange puiſſe contenir 90 ſeptiers, & être vendu à 3 liv. 4 ſols : on demande combien on doit prendre de ſeptiers de chaque ſorte ?

Solution.

Si le nombre de ſeptiers de froment eſt x, celui de ſeigle ſera $90-x$; de plus, la valeur du froment ſera $80x$, & la valeur du ſeigle $\overline{90-x}\times 46$: ainſi $80x+4140-46x=5760$: donc $34x=1620$, & par conſéquent $x=\frac{1620}{34}=47\frac{11}{17}$.

PROBLEME XXVI.

Un ouvrier étant arrêté pour quarante jours à 15 ſols pour chaque jour où il travailleroit ; mais à condition que ceux où il ne travailleroit point, il donneroit 5 ſols : il eſt arrivé qu'en tout il a reçu 15 liv. On demande combien de jours il a travaillé, & combien il a été à rien faire ?

Solution.

Si x eſt le nombre de jours où il a travaillé, alors $40-x$ ſera le nombre de ceux où il n'a rien fait ; de plus comme il a reçu 15 liv. pour les journées employées, & donné 5 ſols pour celles qui ne l'étoient

pas, $15x$ eſt l'argent qu'il a reçu, & $200-5x$ celui qu'il a donné ; ainſi $15x-200+5x=300$ ſols par la queſtion : donc $20x=500$, & par conſéquent $x=25$; par où il eſt évident qu'il a travaillé 25 jours, & qu'il a été 15 à rien faire.

PROBLEME XXVII.

On doit payer un billet de 120 liv. en guinées & en pieces de 27 liv. & le nombre des pieces eſt 100 : combien y a-t-il de chaque ſorte ?

Solution.

Si x eſt le nombre de guinées, alors $100-x$ ſera celui des autres pieces, & $21x+\overline{100-x}\times 27=120\times 20$, c'eſt-à-dire, $21x+2700-27x=2400$ par la queſtion : ainſi $300=27x-21x=6x$, & par conſéquent $x=\frac{300}{6}=50$.

PROBLEME XXVIII.

Une dame par charité diſtribua entre pluſieurs pauvres, conſiſtant en hommes, femmes & enfans 12 liv. 12 ſols ; chaque homme eut 12 ſols, chaque femme 6, & chaque enfant 3 : de plus le nombre des femmes étoit double de celui des hommes moins deux, & celui des enfants triple de

celui des femmes moins quatre : combien y avoit-il de perſonnes ?

Solution.

Soit x le nombre des hommes, alors $2x-2$ ſera celui des femmes, & $6x-10$ celui des enfans : ainſi $x\times 12+2x-2\times 6+6x-10\times 3=12\times 20+12=252$, c'eſt-à-dire, $12x+12x-12+18x-30=252$, ou $42x=294$: ainſi $x=7$: donc il y avoit 7 hommes, 12 femmes, 32 enfans, & en tout 51 perſonnes.

PROBLEME XXIX.

Trouver le nombre qui étant diviſé en trois & quatre parties égales, les produits des parties ſoient les mêmes dans l'un & l'autre cas.

Solution.

Si x repréſente le nombre cherché, le produit des trois parties égales ſera $\frac{x}{3}\times\frac{x}{3}\times\frac{x}{3}=\frac{x^3}{27}$; & celui des quatre $\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}=\frac{x^4}{256}$: ainſi par la queſtion $\frac{x^3}{27}=\frac{x^4}{256}$: donc $27x=256$, & $x=9\frac{13}{27}$.

PROBLEME

PROBLEME XXX.

Trouver deux nombres dans la raiſon de 3 à 4, dont la ſomme ſoit à celle de leur quarré, comme 7 eſt à 50.

Solution.

Soit $3x$ le plus petit nombre, $4x$ ſera le plus grand, & on aura par la condition $3x+4x : 9x^2+16x^2 :: 7 : 50$, ou $7x : 25x^2 :: 7 : 50$. Donc $7x \times 50 = 25x^2 \times 7$, c'eſt-à-dire, $25x^2 = 50x$: ainſi $x = \frac{50}{25} = 2$, enſorte que 6 & 8 ſont les deux nombres cherchés.

PROBLEME XXXI.

Trouver deux nombres dans la raiſon de 9 à 7, enſorte que le quarré de leur ſomme & le cube de leur différence ſoient égaux.

Solution.

Si $9x$ eſt le plus grand nombre, $7x$ ſera le plus petit, & $\overline{16x}^2 = \overline{2x}^3$ par la ſeconde condition, c'eſt-à-dire, $256x^2 = 8x^3$: ainſi $x = \frac{256}{8} = 32$. Donc les deux nombres demandés ſont 288 & 224.

PROBLEME XXXII.

Trouver deux nombres dont la différence ſoit 4, & celle de leurs quarrés 120.

Solution.

Soit x le plus petit nombre, alors $x+4$ ſera le plus grand ; le plus petit quarré ſera x^2, & le plus grand $x^2+8x+16$: ainſi par la queſtion $8x+16=120$. Donc $8x=104$ & $x=13$: ainſi 13 & 17 ſont les nombres cherchés.

PROBLEME XXXIII.

Partager 100 en deux parties, de façon que la différence de leur quarré ſoit 1000.

Solution.

Si la plus grande partie eſt x, la plus petite ſera $100-x$. Donc $x^2-10000+200x-x^2=100$: ainſi $200x=11000$, & par conſéquent $x=\frac{11000}{200}=55$.

PROBLEME XXXIV.

Diviſer 100 en deux parties, telles que le quarré de leur difference ſurpaſſe de 2000 le quarré du double de la plus petite.

Solution.

La plus petite partie étant x, la plus grande ſera $100-x$, & la différence $100-2x$. Donc par la condition $\overline{100-2x}^2=2x+2000$, c'eſt-à-dire, $10000-400x$

$+4x^2=4x^2+2000$, ou $10000-2000=400x$: ainſi $x=\frac{8000}{400}=20$, & $100-x=80$.

PROBLEME XXXV.

A & B ayant mis en ſociété la ſomme de 500 liv. avoient gagnés 160 liv. dont A pour ſa part avoit 32 liv. plus que B ; quelle eſt la miſe de chacun ?

Solution.

Si x eſt la miſe de A, alors on aura 500 liv. (miſe totale) eſt à 160 liv. (gain total) comme x (miſe de A) eſt à $\frac{160x}{500}$ (gain de A) : ainſi le gain de B eſt $160-\frac{16x}{50}$, & par la ſuppoſition $\frac{16x}{50}=160-\frac{16x}{50}+32$. Donc $\frac{32x}{50}=192$, ou $\frac{x}{50}=6$, & par conſéquent $x=50\times6=300$.

PROBLEME XXXVI.

Il faut partager une ſomme entre deux perſonnes A & B ; de façon que la part de A, ſoit à celle de B :: 5 : 3, & qu'elle ſurpaſſe de 50 liv. les $\frac{5}{9}$ de toute la ſomme : combien chaque perſonne aura-t-elle ?

Solution.

Si $5x$ exprime la part de A, & $3x$ celle

de B; la ſomme ſera $8x$, & les $\frac{1}{9}$ $\frac{40x}{9}$; donc $5x-\frac{40x}{9}=50$, c'eſt-à-dire, $\frac{5x}{9}=50$, ou $x=90$: ainſi 450 liv. & 270 liv. ſont les parts demandées.

PROBLEME XXXVII.

A & B commencerent à jouer avec égale ſomme d'argent; A gagna d'abord 20 guinées, mais enſuite il perdit la moitié de tout ce qu'il avoit alors, & il ne lui reſtoit que la moitié de ce qu'avoit B: combien chacun avoit-il en entrant au jeu?

Solution.

Si x eſt le nombre demandé, alors A après avoir gagné 20 guinées, avoit $x+20$, dont la moitié $\frac{x}{2}+10$ eſt ce qu'il avoit en dernier lieu; & qui étant retranché de $2x$ (ſomme de ce qu'ils avoient enſemble) le reſte ſera $2x-\frac{x}{2}-10$, & ce qu'avoit alors B. Donc $2x-\frac{x}{2}-10=x+20$; ainſi $3x-20=2x+40$, & par conſéquent $x=60$.

PROBLEME XXXVIII.

Un pere laiſſa tout ſon bien à quatre fils; l'aîné en avoit la moitié moins 800 liv. le ſecond le quart, & 120 liv. de plus; le

troiſieme la moitié de ce qu'avoit l'aîné, & le plus jeune les deux tiers de ce qu'avoit le ſecond : quel étoit tout le bien & la part de chacun ?

Solution.

Si x eſt tout le bien, alors le

premier avoit . . . . . $\frac{x}{2}-800$

le ſecond . . . . . $\frac{x}{4}+120$

le troiſieme . . . . . $\frac{x}{4}-400$

le quatrieme . . . . . $\frac{2x}{12}+80$

donc la ſomme par conſéquent eſt égale au tout, c'eſt-à-dire, $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-1000=x$; mais il eſt évident (en réduiſant) que $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=x$: ainſi l'équation deviendra $\frac{x}{6}-1000=0$, ou $\frac{x}{6}=1000$; donc tout le bien étoit 6000 liv. dont le fils aîné avoit 2200 liv. le ſecond 1620 liv. le troiſieme 1100 liv. & le plus jeune 1080 liv.

PROBLEME XXXIX.

Une perſonne étant interrogée ſur ſon âge, répliqua ſi aux deux cinquiemes de mon âge multipliés par trois, on ajoute le tiers de mon âge, la ſomme ſera 115 : quel étoit ſon âge ?

Solution.

Si x eſt l'âge demandé, alors par l'énoncé $\frac{2x}{5}\times 3+\frac{x}{3}=115$, c'eſt-à-dire, $\frac{6x}{5}+\frac{x}{3}=115$: donc $18x+5x=15\times 115$, ou $23x=15\times 115$, par conſéquent $x=\frac{15\times 115}{23}=15\times 5=75$.

PROBLÈME XL.

Une perſonne à qui on demandoit l'heure, répondit : ſi on multiplie par 4 les $\frac{3}{8}$ des heures qui reſtent d'ici à minuit, le produit ſurpaſſera autant 12^h que la moitié de l'heure préſente eſt ſurpaſſée par 4 : quelle étoit l'heure après midi ?

Solution.

Soit x le nombre de l'heure, alors $12-x$ ſeront les heures qui reſtent juſqu'à minuit, & $\frac{36-3x}{8}\times 4-12=4-\frac{x}{2}$ par la queſtion, c'eſt-à-dire, $\frac{36-3x}{2}-12=4-\frac{x}{2}$; ainſi $36-3x-24=8-x$, & par conſéquent $x=2$.

PROBLÈME XLI.

Une femme ayant acheté un certain nombre d'œufs ſur le pied de 5 pour 2 ſols 3

dont elle vendit une moitié à raiſon de 2 pour 1 ſols, & l'autre à celle de 3 pour 1 ſols, elle a gagné 4 ſols : quel eſt le nombre des œufs ?

Solution.

Si $2x$ eſt le nombre cherché, alors par la queſtion $5:2::2x:\frac{4x}{5}$ valeur des œufs ; mais le nombre de ſols qu'ils ont été vendu de nouveau eſt $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$: donc on a l'équation $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{4x}{5}=4$; ainſi $15x+10x-24x=120$, ou $x=120$.

PROBLEME XLII.

Une certaine ſomme miſe à intérêt montoit en huit mois à 297 liv. 12 ſols, & en quinze mois à 306 liv. quelle étoit la ſomme & quel étoit l'intérêt ?

Solution.

Soit x la ſomme cherchée, l'intérêt pour huit mois étant $297.*6-x$, & pour 15 $306-x$ on aura $8:15::297:6-x:306-x$: ainſi en multipliant les extrêmes & les moyens, on a $2448-8x=4464-15x$: donc $7x=2016$, par conſéquent $x=288$ l. ſomme cherchée ; pour la valeur de l'intérêt on

* Réduiſant 12 ſols en fractions décimales.

aura 288 l. × 15 : 100 l. × 12 :: 18 l. (intérêt de 288 l. pour quinze moïs) eſt à 5 l. intérêt de 100 liv. pour douze mois.

PROBLEME XLIII.*

Un batelier trouva par expérience qu'il pouvoit avec l'avantage d'une marée ordinaire ramer de Londres à Greenwich, éloigné de cinq mille en trois quarts d'heures ; & que pour y revenir contre une égale marée, quoiqu'il ramât le long du rivage, où le courant eſt moitié moins fort que dans le milieu ; il avoit employé une heure & demie. On demande de trouver par-là quel eſt le chemin par heure que la marée fait dans le milieu où elle eſt plus forte.

Solution.

En premier lieu on a $3^q : 4 :: 5^m : 6\frac{2}{3}^m$ égal à la diſtance qu'il a ramé par heure avec la marée, $6 : 4 :: 5 : 3\frac{1}{3}$ égal à la diſtance qu'il a ramé par heure contre la marée. Si nous nommons la diſtance $(6\frac{2}{3})a$, & l'autre $(3\frac{1}{3})b$; & x le chemin par heure du courant dans le milieu de la riviere ; alors $a - x$ ſera l'effet réel de la rame, le mouvement de la marée étant déduit, & $b + \frac{x}{2}$ ſera l'effet ſemblable dans ſon retour : ainſi ces deux quantités étant égales, on a $b + \frac{x}{2} = a - x$ & $2b + x$

$=2a-2x$, & par conſéquent $x=\frac{2a+2b}{3}$ $=2^{m}\frac{2}{9}$.

PROBLEME XLIV.

Diviſer 36(*a*) en trois parties, telles que la moitié de la premiere, le tiers de la ſeconde & le quart de la troiſieme ſoient égaux entre eux.

Solution.

Si x eſt la premiere partie, alors par la queſtion $\frac{x}{2}$ égal au tiers de la ſeconde partie, ainſi $\frac{3x}{2}$ eſt la deuxieme partie; de plus $\frac{x}{2}$ étant égal au quart de la troiſieme, $\frac{4x}{2}$ ou $2x$ ſera la troiſieme : ainſi $x+\frac{3x}{2}+2x=1a$, & $2x+3x+4x=2a$; par conſéquent $x=\frac{2a}{9}$ $=\frac{2\times36}{9}=2\times4=8$, par où la ſeconde part $\left(\frac{3x}{2}\right)=12$, & la troiſieme $2x=16$.

PROBLEME XLV.

Diviſer le nombre 90 en quatre parties, de façon que la premiere augmentée de 5, la ſeconde diminuée de 4, la troiſieme multipliée par 3, & la quatrieme diviſée par 2, donnent exactement le même réſultat dans tous les cas.

Solution.

Soit x la quatrieme partie ; alors trois fois la troiſieme partie étant $\frac{x}{2}$, elle ſera $\frac{x}{6}$; de plus la ſeconde partie moins 4 étant auſſi $\frac{x}{2}$, elle ſera $\frac{x}{2}+4$; & la premiere plus 5 étant $\frac{x}{2}$, elle ſera $\frac{x}{2}-5$; ajoutant toutes les parties enſemble, on aura $x+\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+4+\frac{x}{2}-5=90$, c'eſt-à dire, $2x+\frac{x}{6}-1=90$: ainſi $13x=91\times6$, & $x=42$. Donc les quatre parties cherchées ſont 16, 25, 7 & 42 reſpectivement.

PROBLEME XLVI.

Deux ouvriers A & B furent employés enſemble pour cinquante jours, à 3 liv. par jour chacun ; pendant lequel tems A dépenſant ſeulement 6 ſols moins que B, avoit épargné deux fois autant que lui, & la dépenſe de deux jours par-deſſus : quelle eſt la dépenſe de A par jour ?

Solution.

Soit x la dépenſe de A par jour, alors $60-x$ ſera ce qu'il a épargné par jour, & $54-x$ l'épargne de B : donc $3000-50x$ ſera l'épargne totale de A, & 2700

$-50x$ celle de B : ainſi $3000-50x=2\times 2700-50x+2x$, ou $3000-50x=5400-98x$: donc $48x=2400$, & $x=50$.

PROBLEME XLVII.

Deux perſonnes A & B avoient un égal revenu ; A épargnoit un cinquieme du ſien ; mais B dépenſant 600 l. par an plus que A au bout de trois ans trouva 1000 liv. de dettes : quel étoit leur revenu, & quelle étoit la dépenſe de chacun par an ?

Solution.

Soit x leur revenu, alors $\frac{4x}{5}$ ſera la dépenſe de A, & $\frac{4x}{5}+600$ celle de B : donc $\frac{4x}{5}+600-x$ eſt la dette annuelle de B, par conſéquent $\frac{4x}{5}+600-x\times 3=1000$, ou $\frac{12x}{5}+1800-3x=1000$, c'eſt-à-dire, $1800-\frac{3x}{5}=1000$; ainſi $9000-3x=5000$, & $x=\frac{4000}{3}=1333$ l. 6 ſ. 8 d. Donc A dépenſoit 1066 l. 13 ſ. 4 d. & B 1666 l. 13 ſ. 4 d.

PROBLEME XLVIII.

Un marchand acheta un nombre de moutons de différentes ſortes dont il a payé

605 liv. ceux de la premiere eſpece qui étoient un tiers du tout furent payé 9 liv. la piece, ceux de la ſeconde qui étoit un quart, furent payés 10 liv. la piece, & le reſte lui coûta 11 liv. la piece : quel étoit le nombre des moutons ?

Solution.

Si x eſt le nombre de tous les moutons, alors le nombre de la premiere ſorte eſt $\frac{x}{3}$, & celui de la ſeconde $\frac{x}{4}$, le nombre reſtant (à 11 liv. chacun) eſt $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{12x-4x-3x}{12}=\frac{5x}{12}$: ainſi par les conditions du problême on a $\frac{x}{3}\times 9+\frac{x}{4}\times 10+\frac{5x}{12}\times 11=605$, c'eſt-à-dire, $\frac{9x}{3}+\frac{10x}{4}+\frac{55x}{12}=605$: & multipliant chaque terme de l'équation par 12, on aura $36x+30x+55x=7260$, ou $121x=7260$: donc $x=60$.

PROBLEME XLIX.

Un drapier, d'une piece de drap qui lui coûtoit 3 l. l'aulne, vendit un tiers de cette piece à 3 liv. 10 ſ. l'aulne, un quart à 4 liv. un cinquieme à 4 liv. 5 ſols, & le reſte à 3 l. 5 ſols ; & ſon gain ſur le tout fût 9 liv. 4 ſols : combien la piece avoit-elle d'aulnes ?

Solution.

Si le nombre cherché eſt x, alors le nombre d'aulnes reſtantes ſera $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=\frac{60x-20x-15x-12x}{60}=\frac{13x}{60}$: donc par la queſtion on aura $\frac{x}{3}\times 70+\frac{x}{4}\times 80+\frac{x}{5}\times 85+\frac{13x}{60}\times 65=60x+184$, ou $20x\times 70+15x\times 80+12x\times 85+13x\times 65=60x\times 60+184\times 60$, $3945x-3600=184\times 60$, $345x=11040$, Donc $x=\frac{11040}{345}=32$.

PROBLEME L.

Un diſtillateur propoſe de mêlanger de l'eau-de-vie étrangere à 1 liv. 4 ſols avec de l'eau-de-vie Angloiſe à 9 ſols le pot, en telle proportion qu'il puiſſe gagner 30 pour 100 par la vente, outre la compoſition à 1 liv. 7 ſols : quelle eſt la proportion ?

Solution.

Suppoſons qu'avec a de pots d'eau-de-vie étrangere il ait mis x de pots d'Angloiſe, alors la premiere lui coûtant $24a$, & la ſeconde $9x$, la valeur du mêlange ſera $24a+9x$: mais la valeur de $a+x$ étant à 27 ſ. le pot, eſt $27a+27x$: donc ſouſtrayant $24a+9x$ de $27a+27x$ le gain eſt $3a+18x$;

ainſi on a par la condition $24x+9x : 3a+18x :: 100 : 30 :: 10 : 3$, par conſéquent $72a+27x=30a+180x$: $180x-27x=72a-30a$, $153x=420$, $51x=14a$, $x=\frac{14a}{51}$; ce qui fait voir qu'il faudra mettre 14 pots d'eau-de-vie Angloiſe ſur 51 d'étrangere.

PROBLEME LI.

Trouver deux nombres en raiſon de 4 à 5, deſquels deux autres dans celle de 6 à 7, étant reſpectivement retranché, les différences ſoient dans le rapport de 2 à 3, & leur ſomme égale à 20.

Solution.

Soient $4x$ & $5x$ les deux premiers nombres, & $6y$, $7y$ les deux derniers, alors $4x-6y : 5x-7y :: 2 : 3$ & $9x-13y=20$ par les conditions; multipliant les extrêmes & les moyens de la proportion, on aura $12x-18y=10x-14y$, ou $6x-9y=5x-7y$ & $x=2y$, qui étant ſubſtitué dans l'autre équation, donnera $18y-13y=20$; ainſi $y=\frac{20}{5}=4$, & $x=2y=8$: donc les deux premiers nombres ſont 32 & 40, & les deux autres 24 & 28.

PROBLEME LII

Un fermier vendit une fois 30 ſeptiers

de froment & 40 d'orge, & il reçut pour le tout 270 liv. une autrefois il vendit 50 ſeptiers de froment & 30 d'orge ſur le même pied, & on lui donna pour le tout 340 l. La queſtion eſt de trouver quel eſt le prix de chaque eſpece de grain par ſeptier ?

ûolution.

Si x & y expriment reſpectivemeut les prix du ſeptier de froment & d'orge, alors des conditions du problême on tirera deux équations, SÇAVOIR :

$\left.\begin{matrix}30x+40y=270\\50x+30y=340\end{matrix}\right\}$ ou $\left\{\begin{matrix}3x+4y=27\\5x+3y=34\end{matrix}\right\}$ $x=\frac{27-4y}{3}$.

donc $\frac{135-20y}{3}+3y=34$, ou $135-20y+9y=102$: ainſi $33=11y$, & $\frac{33}{11}=3=y$, par conſéquent $x=\frac{27-4y}{3}=\frac{27-12}{3}=5$.

PROBLEME LIII.

Un fermier avcc 28 ſeptiers d'orge à 1 liv. 8 ſols le ſeptier vouloit mêlanger du ſeigle à 1 liv. 16 ſols, & du froment à 2 l. 8 ſols : enſorte que tout le mêlange contienne 100 ſeptiers, & puiſſe être vendu 2 liv. combien faut-il prendre de ſeptiers de ſeigle & de froment pour mêlanger avec l'orge ?

Solution.

Soit x le nombre des ſeptiers de ſeigle,

& y celui du froment, la valeur de l'orge étant 784 ſols, celle du ſeigle $36x$, & celle du froment $48y$; on aura $784+36x+48y=4000$, & $28+x+y=100$ par la queſtion; & ſouſtrayant trente-ſix fois la ſeconde de la premiere, le reſte ſera $784-36\times28+12y=400$, c'eſt-à-dire, $-224+12y=400$: donc $12y=624$, & par conſéquent $y=\frac{624}{12}=52$: ainſi $x=100-28-y=20$.

PROBLEME LIV.

A & B travaillant enſemble à un ſemblable ouvrage, gagnoient 24 liv. en ſix jours, A & C 32 liv. 8 ſols en neuf jours, & B & C 48 liv. en quinze jours : combien chaque ouvrier gagnoit-il par jour ?

Solution.

Soient x, y, z le nombre de livres dans les trois valeurs cherchées reſpectivement, alors $6x+6y=480$ ſ., $9x+9z=648$ ſ., $15y+15z=960$ ſ. par la queſtion, & $x+y=80$, $x+z=72$, $y+z=64$ en diviſant; ainſi $y-z=8$ en ſouſtrayant la ſeconde de la premiere, & $2y=72$ en ajoutant celle-ci à la derniere, par conſéquent $y=36$ ſ. de-là $x=80-y=44$ ſ. & $z=64-y=28$ ſ.

PROBLEME LV.

Trouver trois nombres tels que la moitié du premier, le tiers du second, & le quart du troisieme ajoutés ensemble fassent 62 ; que le tiers du premier, le quart du second, & le cinquieme du troisieme soient égaux à 47 ; & enfin que le quart du premier, le cinquieme du second & le sixieme du troisieme égalent 48.

Solution.

Soit $a=62$, $b=47$ & $c=38$, & soient les trois nombres cherchés x, y & z respectivement, alors les conditions du problême donneront les trois équations suivantes : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=a$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=b$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=c$, qui étant dégagés des fractions deviendront $12x+8y+6z=24a$, $20x+15y+12z=60b$, $30x+24y+20z=120c$. Maintenant pour détruire z, on retranchera la seconde équation du double de la premiere, & le triple de la troisieme du quintuple de la seconde ; les résultats seront $4x+y=48a-60b$, $10x+3y=300b-360c$; ainsi soustrayant cette derniere du triple de la précédente ; & divisant par 2, on aura $x=72a-240b+180c=24$: donc $y=48a-60b-4x=60$ & $z=a-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\times 4=120$.

PROBLEME LVII.

Diviſer 90 (a) en trois parties, de ſorte que le double de la premiere, plus 40 (b) le triple de la ſeconde plus 20 (c), & le quadruple de la troiſieme plus 10 (d) donnent des réſultats égaux.

Solution.

Soient x, y & z, les trois parties cherchées reſpectivement par les conditions du problême, on aura $x+y+z=a$, $2x+b=3y+c$, $2x+b=4z+d$; & pour chaſſer y & z, il faut prendre douze fois la premiere équation, quatre fois la ſeconde, & trois fois la troiſieme, qui étant ajoutés enſemble, donneront $26x+12y+12z+7b=12a+12y+12z+4c+3d$, & $x=\frac{12a+4c+3d-7b}{26}=35$; ainſi $y=\frac{2x+b-c}{3}=30$, & $z=a-x-y=25$.

PROBLEME LVII.

On propoſe de partager une ſomme d'argent entre trois perſonnes A, B & C; de façon que la part de A excéde les quatre ſeptiemes de celles de B & de C de 30 l. que celle de B ſurpaſſe les trois huitiemes des parts de A & C de 30 liv. & enfin que celle de C ſurpaſſe les deux neuviemes de

celles de A & B de la même quantité : on demande la part de chacun.

Solution.

Soit $a=30$ & x, y, z les trois nombres cherchés, alors par la queſtion

$x-\frac{4y+4z}{7}=a$ réduiſant $7x-4y-4z=7a$,

$y-\frac{3x+3z}{8}=a$ . . . . . $8y-3x-3z=8a$,

$z-\frac{2x+2y}{9}=a$ . . . . . $9z-2x-2y=9a$,

pour chaſſer y (ce qui eſt aiſé à cauſe de ſes co-efficiens pairs) ajoutez ſucceſſivement le double de la premiere équation, & le quadruple de la troiſieme à la ſeconde, par ce moyen on aura $11x-11z=22a$, $-11x+33z=44a$; de plus ajoutant ces deux dernieres équations, on aura $22z=66a$: donc $z=3a=90$; ainſi $x=2a+z=5a=150$, & $y=a+\frac{3}{5}\times x+z=4a=120$.

PROBLEME LVIII.

Si A & B enſemble ont achevé une piece d'ouvrage en huit jours, A & C enſemble en neuf jours, B & C en dix jours : combien faudra-t-il de jours à chaque perſonne ſeule pour faire le même ouvrage.

Solution.

Soit tout l'ouvrage repréſenté par a, &

les parties que chaque ouvrier a fait par x, y & z respectivement, alors par la question $8x+8y=a$, & divisant .... $x+y=\frac{a}{8}$, $9x+9z=a$ ..... $x+z=\frac{a}{9}$, $10y+10z=a$ ..... $y+z=\frac{a}{10}$, ainsi $y-z=\frac{a}{8}-\frac{a}{9}=\frac{a}{72}$, & $2y=\frac{a}{10}+\frac{a}{72}=\frac{82a}{720}$; par conséquent $y=\frac{41a}{720}$: de-là $x=\frac{a}{8}-y$, c'est-à-dire, $\frac{49a}{720}$ & $z=\frac{a}{10}-y=\frac{31a}{720}$. Présentement la partie de l'ouvrage (a) exécutée par chaque personne en un seul jour étant ainsi assignée, le nombre de jours que chacun employeroit à faire le tout se trouvera en divisant le tout par la partie; ainsi a divisé par $\frac{41a}{720}=\frac{720a}{41a}=\frac{720}{41}=17\frac{23}{41}$ seroit le nombre de jours employés par B, seul pour faire tout l'ouvrage & de même ce nombre de jours, pendant lesquels A & C le pourroient faire, seroit $14\frac{34}{49}$ & $23\frac{7}{31}$ respectivement.

PROBLEME LIX.

Trouver trois nombres tels que le premier & la moitié des deux autres, le second & le tiers des deux autres, & le troisieme plus le quart des autres soient tous égaux à 51.

Solution.

Soit $a=51$ & x, y, z les trois nombres cherchés, alors par la queſtion $x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{x+z}{3}=a$, $z+\frac{y+x}{4}=a$, qui, étant dégagés de fractions, deviennent $2x+y+z=2a$, $3y+x+z=3a$, $4z+y+x=4a$; & fouſtrayant la ſeconde de la troiſieme, & la premiere du double de la ſeconde, les reſtes ſont $-2y+3z=a$ & $5y+z=4a$, retranchant la premiere du triple de l'autre, on aura $17y=11a$: donc $y=\frac{11a}{17}=33$, $z=4a-5y=\frac{13a}{17}=39$ & $x=3a-3y-z=\frac{5a}{17}=15$.

PROBLEME LX.

A, B & C peuvent enſemble finir un ouvrage en neuf jours, A, B & D enſemble en 10, A, C & D en onze jours, & B, C, D en douze : combien leur faudra-t-il de jours pour finir l'ouvrage en y travaillant tous quatre enſemble ?

Solution.

Si on exprime les nombres donnés par a, b, c, d & les parties de l'ouvrage (g) faites par chacun en un jour par a, x, y & z reſpec-

tivement, on aura les équations ſuivantes :

$a \times u+x+y=g$ diviſant . . . $u+x+y=\frac{g}{a}$

$b \times u+x+z=g$ . . . . . $u+x+z=\frac{g}{b}$

$c \times u+y+z=g$ . . . . . $u+y+z=\frac{g}{c}$

$d \times x+y+z=g$ . . . . . $x+y+z=\frac{g}{d}$

deſquelles faiſant la ſomme & diviſant par trois, on trouve $u+x+y+z=\frac{1}{3} \times \frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}$: donc l'ouvrage fait par les quatre enſemble en un ſeul jour eſt exprimé par $\frac{1}{3} \times \frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}$ par quoi diviſant tout l'ouvrage g, on aura $\frac{39}{\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ $=\frac{3abcd}{bcd+acd+abd+abc}=7\frac{17}{22}\frac{97}{89}$ pour le nombre des jours cherchés.

PROBLEME LXI.

Trouver un nombre dont la racine quarrée ſoit à la racine cubique en raiſon de 5 à 2.

Solution.

Soit x^6 le nombre cherché, x^3 en ſera la racine quarrée, & x^2 la racine cubique ; maintenant par la queſtion $x^3 : x^2 :: 5 : 2$; donc $2x^3=5x^2$, ou $2x=5$, ou enfin $x=\frac{5}{2}$

$=2.5$: ainſi $x^6=244.140625$ qui eſt le nombre cherché.

PROBLEME LXII.

Trouver deux nombres en raiſon de 3 à 5, & dont la cinquieme puiſſance du premier ſoit au cube du ſecond en raiſon de 972 à 125.

Solution.

Si $3x$ eſt le premier nombre, $5x$ ſera le deuxieme, & on aura par la queſtion $3x : \overline{5x}^{5} :: 972 : 125$, c'eſt-à-dire $243x^5 : 125x^3 :: 972 : 125$: ainſi $243x^5 \times 125 = 125x^3 \times 972$, ou $243x^2 = 972$: donc $x^2 = \frac{972}{243} = 4$, & $x = \sqrt{4} = 2$: ainſi 6 & 10 ſont les deux nombres demandés.

PROBLEME LXIII.

Trouver trois nombres en raiſon de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$ & à $\frac{1}{4}$, dont la ſomme des quarrés ſoit 549.

Solution.

Soit x le premier nombre, alors $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: x : \frac{2x}{3}$ égal au deuxieme, & $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: x : \frac{x}{2}$ égal au 3e : ainſi par la condition, $x^2 + \overline{\frac{2x}{3}}^{2} + \overline{\frac{x}{2}}^{2} = 549$, c'eſt-à-dire, $x^2 + \frac{4x^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 549$,

ou $36x^2+16x^2+9x^2=549\times36$; de-là $x^2=\frac{549\times36}{61}=9\times36$, & $x=3\times6=18$: donc 18, 12 & 9 ſont les nombres cherchés.

Autrement.

Réduiſant les fractions données $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ au même dénominateur, il eſt clair qu'elles ſont entr'elles comme 6, 4 & 3. Si donc le le premier des nombres demandés eſt dénoté par $6x$, les deux autres ſeront $4x$ & $3x$ reſpectivement ; de ſorte qu'on aura $36x^2+16x^2+9x^2=549$, ainſi $x=3$ & les nombres demandés comme ci-devant.

PROBLEME LXIV.

Connoiſſant la différence 6 de deux nombres & leur produit 720, connoître les deux nombres.

Solution.

Soit x le plus petit, alors $x+6$ ſera le plus grand ; ainſi par la ſuppoſition on aura $x^2+6x=720$. Mais dans la ſolution de cet ordre d'équation (dans lequel la premiere & la ſeconde puiſſance de x ſont enveloppées) on prend la moitié du co-efficient de x (qui dans ce cas) eſt 3, dont on forme le quarré que l'on ajoute dans les deux membres de l'équation : par ce moyen elle devient $x^2+6x+9=729$. Le

premier membre de l'équation étant à préſent un quarré complet, ſa racine peut être extraite, & elle ſera exprimée par x joint à la moitié du co-efficient avec ſon ſigne propre, c'eſt-à-dire, $x+3$ (comme il eſt aiſé de le prouver par la multiplication de $x+3$ par lui-même, qui donne x^2+6x+9 qui eſt la quantité en queſtion) il eſt donc évident que $x+3=\sqrt{729}=27$, & par conſéquent $x=24$.

PROBLEME LXV

La ſomme de deux nombres étant 60, & celles de leurs quarrés 1872, connoître ces nombres.

Solution.

Soit x le plus grand, $60-x$ ſera le plus petit: donc $x^2+3000-120x+x^2=1872$, ou $2x^2-120x=-1728$, & $x^2-60x=-864$, achevant le quarré (comme dans le problême précédent) on a $x^2-60x+900=-864+900=36$, & par conſéquent extrayant la racine $x-30=\sqrt{36}=6$: donc $x=6+30=36$, & $60-x=24$ qui ſont les deux nombres demandés.

Mais pour réſoudre le problême d'une façon plus générale (par les lettres), prenez a pour la ſomme des deux nombres, b pour celle de leurs quarrés, & x pour

le plus grand nombre, comme ci-deſſus; alors vous aurez $x^2+a^2-2ax+x^2=b$; ainſi $2x^2-2ax=b-a^2$ & $x^2-ax=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2}$; & prenant la moitié du co-efficient du ſecond terme, le quarré complet ſera donc $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}$: d'où extrayant la racine, vous aurez $x+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}$, & par conſéquent $x=\sqrt{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}$: ainſi ſi vous prenez $a=60$ & $b=1872$, vous trouverez le reſte comme ci-devant.

PROBLÈME LXVI.

Diviſer 60 (a) en deux parties, de façon que leur produit ſoit 864 (b).

Solution.

Si le plus grand eſt x, le plus petit ſera $a-x$ & $ax-x^2=b$ par les conditions du problême, changeant le ſigne de tous les termes de l'équation, & les ordonnant ſuivant les plus hautes puiſſances de x, on aura $x^2-ax=-b$, ainſi achevant le quarré $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=-b+\frac{a^2}{4}$, & par conſéquent $x-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$: donc $x=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}+\frac{a}{2}=36$ la plus grande partie, & la plus petite $a-x=24$.

PROBLEME LXVII.

Diviſer 60 (*a*) en deux parties, de ſorte que le quarré de la plus grande multiplié par la plus petite, ajouté au quarré de la plus petite multiplié par la plus grande ſoit égale à 51840 (*b*).

Solution.

Si x eſt la plus grande partie, alors $a-x$ ſera la plus petite; & $x^2\times a-x+a-x\times x=b$, c'eſt-à-dire, $ax^2-x^3+a^2x-2ax^2+x^3=b$, ou $a^2x-ax^2=b$: ainſi $x^2-ax=\frac{b}{a}$, par conſéquent $x=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b}{a}}+\frac{a}{2}=36$.

PROBLEME LXVIII.

La ſomme de deux nombres étant 20 (*a*) & celle de leurs cubes 2240 (*b*), déterminer les nombres.

Solution.

Soit x le plus grand, $a-x$ le plus petit, donc $x^3+a-x^3=b$, c'eſt-à-dire, $x^3+a^3-3a^2x^2+3ax^2-x^3=b$: ainſi $3ax^2-3a^2x=b-a^3$, & $x^2-ax=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{3}$, & le quarré étant achevé, $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}$; & extrayant la racine, $x-\frac{a}{2}$

$=\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}}$: par conséquent $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}}$ $=\frac{20}{2}+\sqrt{37\frac{1}{3}-33\frac{1}{3}}=12$.

PROBLEME LXIX.

Diviſer le nombre 240 (a) en deux parties, telles que la plus grande diviſée par la plus petite, ſoit à la plus petite diviſée par la plus grande en raiſon de 147 à 75, ou de m à n.

Solution.

Si on déſigne la plus grande partie par x, la plus petite ſera $a-x$; on aura donc $\frac{x}{a-x} : \frac{a-x}{x} :: m : n$; $\frac{nx}{a-x}=\frac{m\ a-x}{x}$, & $\frac{nx^2}{m}=a-x$, de laquelle extrayant la racine, $x\sqrt{\frac{n}{m}}=a-x$. Suppoſant $\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{b}{c}$, on a $bx=ca=cx$, & par conſéquent $x=\frac{ca}{b+c}$; mais dans le cas propoſé $\sqrt{\frac{n}{m}}=\sqrt{\frac{75}{147}}=\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{5}{7}$, on a $b=5$, $c=7$: donc $x=\frac{7\times 240}{12}=7\times 20=140$.

PROBLEME LXX.

Deux ouvriers A & B furent employés à différens prix par jour; A au bout d'un certain nombre de jours, avoit à recevoir

96 liv. B ayant été ſix jours ſans travailler, reçut ſeulement 54 liv. Mais ſi B avoit travaillé tous les jours, & que A eut été ſix jours à rien faire, ils auroient reçu exactement autant l'un que l'autre ; trouver le nombre de jours qu'ils ont travaillé, & ce qu'ils gagnoient par jour.

Solution.

Soit x le nombre de jours que A a travaillé, alors $x-6$ ſera le tems que B a travaillé ; de plus $\frac{96}{x}$ eſt ce que A gagne par jour, & $\frac{54}{x-6}$ ce que gagne B : donc $\frac{54}{x-6}\times x$ eſt ce que B auroit gagné en travaillant tous les jours, & $\frac{96}{x}\times x-6$ ce que A auroit gagné s'il étoit reſté ſix jours à rien faire. Ces deux valeurs ſont égales par la ſuppoſition, on a donc $\frac{54x}{x-6}=\frac{96\times x-6}{x}$; & en réduiſant $54x^2=96\times\overline{x-6}^2$, ou $\frac{9x^2}{16}=\overline{x-6}^2$: donc en extrayant la racine quarrée des deux côtés $\frac{3x}{4}=x-6$, & par conſéquent $x=24$; de-là il eſt évident que A avoit 4 liv. & B 3 liv. par jour.

PROBLEME LXXI.

De deux places, diſtantes de 320 mille,

deux perſonnes A & B partirent en même tems, dans le deſſein de ſe rencontrer; A faiſoit par jour huit mille plus que B; & le nombre de jours qu'ils ont marché étoit la moitié du nombre de mille que B a fait par jour. On demande de trouver le chemin qu'ils ont fait pour ſe rencontrer.

Solution.

Soit x le nombre de jours qu'ils ont mis pour ſe rencontrer, b=8 mille, & a=320 mille, alors par la ſuppoſition $\left.\begin{matrix}2x\\2x+b\end{matrix}\right\}$ ſera le chemin de $\left\{\begin{matrix}B\\A\end{matrix}\right\}$ par jour: donc les multipliant chacun par x le nombre des jours, on a $2x^2$ & $2x^2+bx$ pour le nombre de mille fait par B & A reſpectivement, & par conſéquent $4x^2+bx=a$: ainſi $x^2+\frac{bx}{4}+\frac{b^2}{64}=\frac{a}{4}+\frac{b^2}{64}$, & $x=\sqrt{\frac{a}{4}+\frac{b^2}{64}}-\frac{b}{8}=8$: donc $2x^2=128$, égal au chemin fait par B, & $2x^2+bx=192$, égal à celui fait par A.

PROBLEME LXXII.

Deux meſſagers A & B étant parti enſemble pour un même lieu, diſtant 90 (*a*) mille; le premier faiſoit un mille par heure plus que l'autre, & il arriva à la fin de ſa

journée une heure avant lui. On demande le nombre de mille que chacun a fait par heure.

Solution.

Si x eſt le nombre cherché pour A, alors $x-1$ ſera celui pour B; de plus $\frac{a}{x}$ ſera le nombre d'heures employées par A, & $\frac{a}{x-1}$ le nombre de celles employées par B, & par conſéquent $\frac{a}{x}=\frac{a}{x-1}-1$, ainſi par réduction $ax-a=ax-x^2+x$, ou $x^2-x=a$: donc $x^2-x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}$ (en complétant le quarré), & par conſéquent $x=\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=10$.

PROBLEME LXXIII.

Trouver deux nombres, enſorte que leur ſomme multipliée par le plus grand, ſoit égale à cent fois le plus petit, & multipliée par le plus petit, contienne ſoixante-quatre fois le plus grand.

Solution.

Soit x le plus grand & y le plus petit, par les conditions $\overline{x+y}\times x=100y$, & $\overline{x+y}\times y=64x$. Préſentement multipliant la premiere équation par y, & la deuxieme par x, les deux premiers membres étant les mêmes, les deux ſeconds donneront

$100y^2 = 64x^2$: donc extrayant les racines quarrées, $10y^2 = 8x$, & par conſéquent $y = \frac{4x}{5}$, qui étant ſubſtitué dans la ſeconde équation, donne $x + \frac{4x}{5} \times \frac{4x}{5} = 64x$, ou $\frac{2x}{5} \times \frac{4}{5} = 64$: ainſi $x = \frac{25 \times 16}{9} = 44\frac{4}{9}$, & $y = 35\frac{5}{9}$.

PROBLEME LXXIV.

Trouver trois nombres, tels que leur produit diviſé continuellement par la ſomme de deux de chacun d'eux faſſe des nombres donnés ou (ce qui eſt la même choſe) de déterminer les valeurs de x, y & z dans les équations ſuivantes :

$$\frac{xyz}{x+y} = 200, \quad \frac{xyz}{x+z} = 150, \quad \frac{xyz}{y+z} = 120.$$

Solution.

Premierement en multipliant $xyz = 200x + 200y = 150x + 150z = 120y + 120z$: donc en réduiſant

$$\left.\begin{array}{l} 50x + 200y = 150z \\ 200x + 80y = 120z \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} x + 4y = 3z \\ 5x + 2y = 3z \end{array}\right.$$

ainſi $x + 4y = 5x + 2y$, ou $x = 2y$, qui étant ſubſtitué dans $3z = x + 4y$, donne $3z = 9x$ & $z = 3x$. Et ſubſtituant ces valeurs dans $\frac{xyz}{x+y} = 200$, elles donnent $\frac{x \times 2x \times 3x}{x+2x} = 200$ c'eſt-à-dire, $2x^2 = 200$: donc $x = 10$, $y = 20$, & $z = 30$.

PROBLEME

PROBLEME LXXV.

Trouver deux nombres, dont le produit ſoit égal au quarré de leur différence.

Solution.

Suppoſons que le plus petit eſt au plus grand, comme 1 eſt à x, alors ſi le plus petit eſt z, le plus grand ſera xz, & on aura $xz \times z = xz - z$, ou $xz^2 = x^2z^2 - 2xz^2 + z^2$, qui étant toute diviſée par z^2, donne $x = x^2 - 2x + 1$: donc $x^2 - 3x = -1$, & par conſéquent $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.618$, &c.

Ainſi la raiſon de deux nombres, dont le rectangle eſt égal au quarré de leur différence, eſt celle de 1 à 2.618, &c.

PROBLEME LXXVI.

Trouver deux nombres dont le produit eſt 300 (a), enſorte que ſi on ajoute 10 (b) au plus petit, & qu'on retranche 8 (c) du plus grand, le produit des réſultats ſoit encore 300 (a).

Solution.

Soit le plus grand x, & le plus petit y, alors par les conditions $xy = a$, $x - c \times y + b = a$, ou $xy + bx - cy - cb = a$, de laquelle

ſouſtrayant la premiere, le reſte eſt $bx-cy-cb=o$, & $x=\frac{cb+cy}{b}$ qui, ſubſtituée dans la premiere équation, donne $\frac{cby+cy^2}{b}=a$: donc $y^2+by=\frac{ab}{c}$; & achevant le quarré $y^2+by+\frac{b^2}{4}=\frac{ab}{c}+\frac{b^2}{4}$; ainſi $y=\sqrt{\frac{ab}{c}+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}=15$, & $x=\frac{a}{y}=20$.

PROBLEME LXXVII.

Diviſer 100 en deux parties, telles que leur différence ſoit à leur ſomme, comme leur produit eſt à la différence de leurs quarrés.

Solution.

Si on nomme a la moitié du nombre donné, & x la moitié de la différence des deux parties, alors la plus grande eſt exprimée par $a+x$, & la plus petite par $a-x$; on a donc $2x : 2a :: a+x \times a-x : a+x^2-a-x^2$, c'eſt-à-dire, $x : a :: a^2-x^2 : 4ax$; ainſi $4ax^2=a\times a^2-x^2$, ou $4x^2=a^2-x^2$, & par conſéquent $x=\sqrt{\frac{a^2}{5}}=22.36$, de façon que la plus grande eſt 72.36, & la plus petite 27.64.

PROBLEME LXXVIII.

Diviſer le nombre 60 (*a*) en deux parties, de façon que leur produit ſoit à la ſomme de leurs quarrés en raiſon de 2 à 5, ou de *m* à *n*.

Solution.

Soit x la plus grande partie, alors $a-x$ ſera la plus petite, leur produit $ax-x^2$, & la ſomme de leurs quarrés $a^2-2ax+2x^2$: donc $m:n::ax-x^2:a^2-2ax+2x^2$, & $2mx^2-2max+ma^2=nax-nx^2$: ainſi $2mx^2+nx^2-2max-nax=-ma^2$, $\overline{2m+n}\times x^2-\overline{2m+n}\times ax=-ma^2$, ou $x^2-ax=-\frac{ma^2}{2m+n}$: donc $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-\frac{ma^2}{2m+n}=\frac{a^2}{4}\times\frac{n-2m}{n+2m}$, & $x=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{n-2m}{n+2m}}+\frac{a}{2}=40$.

PROBLEME LXXIX.

Trouver deux nombres dont le produit ſoit 320 (*a*), & la différence de leurs cubes ſoit aux cubes de leur différence, comme 61 (*n*) eſt à 1.

Solution.

Soit x le plus grand nombre, & y le plus petit, alors $xy=a$, & $x^3-y^3:x-y::n:1$ par la condition : ainſi $x^3-y^3:x^3$

$-3x^2y+3xy^2-y^3::n:1$; ſouſtrayant les conſéquents de leurs antécédents, on a $3x^2y-3xy^2:x^3-3x^2y+3xy^2-y^3::n-1:1$, ou $3xy\times x-y:x-y::n-1:1$; diviſant par $x-y$, $3xy:x-y::n-1:1$, ou à cauſe de $xy=a$, $3a:x-y::n-1:1$, d'où $x-y=\frac{3a}{n-1}$, & par conſéquent $x-y=\sqrt{\frac{3a}{n-1}}$ qu'on ſuppoſe égal à b ; alors par les équations $xy=a$ & $x-y=b$, la valeur de x ſera égale à $\sqrt{\frac{b^2+4a+b}{2}}=20$, & $y=\sqrt{\frac{b^2+4a-b}{2}}$. Voyez le Problême LXIV.

Le même autrement.

Si x repréſente la moitié de la différence, & z la moitié de la ſomme des deux nombres, alors le plus grand ſera $z+x$, & le plus petit $z-x$: on aura donc par la condition $z+x\times z-x=a$, $z+x-z-x=n\times 2x$, c'eſt-à-dire, $z^2-x^2=a$, $6z^2x+2x^3=8nx^3$. La derniere étant diviſée par $2x$, donne $3z^2+x^2=4nx^2$, d'où retranchant le triple de la premiere, on a $4x^2=4nx^2-3a$, & par conſéquent $x=\sqrt{\frac{3a}{4n-4}}=2$; ainſi $z=\sqrt{a+x^2}=18$: donc $z+x=20$, & $z-x=16$ qui ſont les nombres cherchés.

PROBLEME LXXX.

Un fermier a reçu 192 liv. pour une certaine quantité de froment & une ſomme égale à un prix moindre de 2 liv. par ſeptiers pour une quantité d'orge qui excéde celle de froment de 16 ſeptiers : combien y a-t-il de ſeptiers de chaque eſpece ?

Solution.

Prenons a égal au prix total de chaque ſorte de grain, b égal à la différence des quantités, c égal à la différence des prix, & x égal au nombre des ſeptiers de froment; alors diviſant tout le prix par le nombre des ſeptiers, on a $\frac{a}{x}$ pour le prix du froment par ſeptiers ; & de la même maniere le prix de l'orge par ſeptiers, eſt $\frac{a}{x+b}$: donc par la queſtion $\frac{a}{x}-\frac{a}{x+b}=c$; ainſi en réduiſant $ax+ab-ax=cx^2+cbx$, ou $\frac{ab}{c}=x^2+bx$, par conſéquent $x=\sqrt{\frac{ab}{c}+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}=32$ nombre des ſeptiers de froment, & $x+16=48$ celuï des ſeptiers d'orge.

PROBLEME LXXXI.

Quelqu'un a acheté deux pieces de

draps de différentes eſpeces ; pour le plus fin qui coûte 4 liv. par aulne plus que l'autre, il a donné 360 liv. mais pour le plus gros, qui a 10 aulnes de plus que l'autre, il a donné ſeulement 320 liv. trouver combien chaque piece contient d'aulnes.

Solution.

Soit x le nombre d'aulne du plus fin, & y le prix de chacune, alors $x+10$ ſera la longueur de la plus groſſe piece, & $y-4$ ſon prix par aulne : ainſi par la queſtion $xy=360$, $x+10\times y-4=320$ réduiſaut la derniere $xy+10y-4x=360$, de laquelle retranchant $xy=360$, le reſte eſt $10y-4x=0$: donc $10y=4x$, & $y=\frac{2x}{5}$, qui étant ſubſtituée dans la premiere équation, donne $\frac{2x^2}{5}=360$; ainſi $x=\sqrt{900}=30$.

PROBLEME LXXXII.

Trouver deux nombres dont le produit ſoit égal à la différence de leurs quarrés, & la ſomme de leurs quarrés égale à la différence de leurs cubes.

Solution.

Soit x le plus petit nombre & ſoit le

plus grand à x dans le rapport de y à l'unité, ou ce qui eſt la même choſe, ſoit le plus grand xy, alors

$x \times xy = x^2y - x^2$
$y^2x^2 + x^2 = xy^3 - x$ } diviſant { $y = y^2 - 1$
$y^2 + 1 = xy^3 - x$

par la premiere équation $y^2 - y = 1$: ainſi $y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, & par conſéquent $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; mais par la ſeconde $x = \frac{y^2+1}{y^3-1} = \frac{y+2}{2y}$ (à cauſe de $y^2 = y + 1$) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}-2}{4}$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{5} - 1$) $= \frac{\sqrt{5}}{2}$: donc les deux quantités ſont $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ & $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$.

PROBLEME LXXXIII.

A eſt parti de Londres pour York, en même tems que B partoit d'York pour Londres, & A eſt arrivé à York neuf heures, & B ſeize heures après s'être rencontrés, en combien de tems chaque voyageur a-t-il achevé ſon voyage ?

Solution.

Soit x le nombre d'heures, pendant leſquelles ils ont marché chacun avant le tems de leur rencontre ; alors puiſque A (par la premiere partie de la ſuppoſition)

fait en $9^h = a$, le même chemin que B fait en x d'heures, on a $a : x :: x : \frac{x^2}{a}$ le tems pendant lequel B a fait un chemin égal à celui que A a fait en x d'heures : mais (par la ſeconde partie) B en $16^h = b$ a fait le même chemin que A en x d'heures; ainſi il eſt évident que $\frac{x^2}{a} = b$, & par conſéquent $x = \sqrt{ab} = 12$: donc A a marché 21 heures, & B 28.

PROBLEME LXXXIV.

Diſtribuer la ſomme de 190 liv. entre trois perſonnes, dont les parts ſoient en progreſſion géométrique, & dont la plus grande ſurpaſſe la moindre de 50 livres, quelles ſont les parts ?

Solution.

Si x eſt la plus petite, alors $x+50$ ſera la plus grande; & la ſomme de ces deux ci étant ſouſtraite de 190, donne la moyenne part $140+2x$: donc par la queſtion $x : 140 - 2x :: 140 - 2x : x+50$, & par conſéquent $140 - 2x = x \times x + 50$, c'eſt-à-dire, $19600 - 560x + 4x^2 = x^2 - 50x$; ainſi $3x^2 - 610x = 19600$, & $x^2 - \frac{610x}{3} = \frac{19600}{3}$ achevant le quarré $x^2 - \frac{610x}{3} + \frac{93025}{9} = \frac{19600}{3}$

$+\frac{93025}{9}=\frac{34225}{9}$, & extrayant la racine $x=\frac{305-185}{3}=40$: donc les deux autres parties ſont 60 & 90 liv.

PROBLEME LXXXV.

Deux lettres de change, l'une de 480 l. payable en ſix mois, & l'autre de 600 liv. payable en neuf mois, furent eſcomptées pour 34 liv. quel étoit le denier de l'eſcompte ?

Solution.

Si x repréſente l'intérêt d'une livre par an, une livre en ſix mois vaudra $1+\frac{x}{2}$, & en neuf mois $1+\frac{3x}{4}$; ainſi la valeur préſente de la ſomme payable en ſix mois ſera $\frac{480}{1+\frac{1}{2}x}$, & celle de la ſomme payable en neuf mois $\frac{600}{1+\frac{3x}{4}}$: donc par la ſuppoſition $\frac{480}{1+\frac{1}{2}x}+\frac{600}{1+\frac{3x}{4}}=480+600-34=1046$; & réduiſant $480+360x+600+300x=1046\times 1+\frac{5x}{4}+\frac{3x^2}{8}$, c'eſt-à-dire, $1080+660x=\frac{1046\times 8+10x+3x^2}{8}$, par conſéquent $\frac{1080+660x\times 8}{1046}=3x^2+10x+8$, c'eſt-à-dire,

$\frac{8640}{1046}+\frac{5280x}{1046}=3x^2+10x+8$; & diviſant les fractions par 2 pour les réduire à leurs moindres termes $\frac{4320}{523}+\frac{2640x}{523}=3x^2+10x+8$: donc $\frac{4320}{523}+\frac{2640x}{523}=3x^2-\frac{5230x}{523}+\frac{4184}{523}$, ou $3x^2+\frac{5230x}{523}-\frac{2640x}{523}=\frac{4320}{523}-\frac{4184}{523}$: donc en réduiſant $3x^2+\frac{2590x}{523}=\frac{136}{523}$; & (diviſant tout par 3) $x^2+\frac{2590x}{3\times523}=\frac{136}{3\times523}$, enfin achevant le quarré $x^2+\frac{2590x}{1569}+\frac{1295}{1569}=\frac{136}{1569}+\frac{1295}{1569}=\frac{1890409}{2461761}$; & extrayant les racines $x+\frac{1295}{1569}=\frac{1374,889}{1569}$: donc $x=\frac{79,889}{569}$ qui eſt l'interêt d'une livre par an. Multipliant ce nombre par 100, on trouve 5,09 liv. c'eſt-à-dire, à peu près 5 liv. 1 ſols 9 den. qui eſt l'intérêt annuel de 100 liv. ſur le pied de l'eſcompte.

PROBLEME LXXXVI.

A & B ont tiré du commerce chacun 5490 en un an y compris l'intérêt & le principal ; mais A, dont le profit eſt 2 pour cent plus grand que celui de B, a gagné 100 liv. par an plus que lui. Combien chacun gagne-t-il pour cent ? Quels ſont les profits, & quels étoient leurs fonds ?

Solution.

Soit $c=100$, $b=5940$, $2=a$, $d=100$ différence entre les gains, & x égal au gain de A par cent, on aura $c+x : x :: b : \frac{bx}{c+x}$ gain total de A, & de même $c+x-a : x-a :: b : \frac{b\times x-a}{c+x-a}$ gain total de B: donc $\frac{bx}{b+x} - \frac{b\overline{x-a}}{c+x-a} = d$ par la ſuppoſition, ainſi $abc = x^2+2cx-ax-ac+c^2\times d$, & par conſéquent $x^2+2c-a\times x = \frac{abc}{d}+ac-c^2$ achevant le quarré $x^2+2c-a\times x+\frac{\overline{2c-a}^2}{4} = \frac{abc}{d}+\frac{a^2}{4}$: donc $x=\sqrt{\frac{abc}{d}+\frac{a^2}{4}}-\frac{2c-a}{2}=10$; de-là il eſt évident que A gagne 10 pour 100, & 540 par an; & B 8 pour 100, & 440 liv. par an, & que le premier a employé 5400 liv. & le ſecond 5500 liv.

PROBLEME LXXXVII.

De quatre nombres en progreſſion géométrique, on donne la ſomme des deux premiers qui eſt $20=a$, & celle des deux derniers qui eſt $45=b$: on demande quels ſont les quatre nombres.

Solution.

Soit x le premier nombre, & y le troiſieme, alors le ſecond ſera $a-x$, & le quatrieme $b-y$, qui étant mis en ordre, donnent $\dot{\dot{x}} : a-x :: y : b-y$, & par la nature de la progreſſion $x \times b-y = a-x \times y$, & $xy = a-x$ par la premiere $y = \frac{bx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde, on a $\frac{bx^2}{a} = a-x$; ainſi extrayant la racine quarrée dans chaque côté, $x\sqrt{\frac{b}{a}} = a-x$, & par conſéquent $x = \frac{a}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}} = 8$: donc 8, 12, 18 & 27 ſont les quatre nombres demandés.

PROBLEME LXXXVIII.

On demande de partager la ſomme de 700 l. $= a$ entre quatre perſonnes, enſorte que les parts ſoient en progreſſion géométrique, & que la différence de la plus grande & de la plus petite, ſoit à celle des deux moyennes en raiſon de 37 à 12, ou de m à n.

Solution.

Soit le premier terme de la progreſſion x, & le rapport commun $1 : y$, alors $x + xy$

$+xy^2+xy^3=a$, & $xy^3-x : xy^2-xy :: m : n$ par la queſtion, de cette proportion on tire $y^3-1=y-1\times\frac{my}{n}$, ou $y^2+y+1=\frac{my}{n}$ (en diviſant par $y-1$) : ainſi $y=\frac{m-n+\sqrt{m^2-2mn-3n^2}}{2n}=\frac{25+7}{24}=\frac{4}{3}$, & $x=\frac{a}{1+y+y^2+y^3}=\frac{27\times 700}{27+36+48+64}=108$: donc les quatre parts ſont 108, 144, 192 & 256.

PROBLEME LXXXIX.

De quatre nombres en progreſſion arithmétique, on donne $400=a$ pour la ſomme des quarrés des moyens, & $464=b$ pour celle des quarrés des extrêmes, déterminer les nombres.

Solution.

Si x eſt le plus petit extrême, & y la différence commune, alors les quatre termes ſeront x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, & par la queſtion

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+x^2+2y^2=a \\ x^2+x+3y=b \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x^2+6xy+5y^2=a \\ 2x+6xy+9y^2=b \end{array}\right.$$

par ſouſtraction $4y^2=b-a$: donc $y=\frac{\sqrt{b-a}}{2}=4$; mais par la premiere équation $x^2+3xy=\frac{a}{2}-\frac{5y^2}{2}$ qui donne (en regardant

y comme connu) $x=\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{y^2}{4}}-\frac{3y}{2}=8$: donc 8, 12, 16 & 20 ſont les quatre nombres demandés.

PROBLEME XC.

La ſomme de quatre nombres en progreſſion arithmétique étant $56=b$, & $864=c$ celle de leurs quarrés, trouver ces nombres.

Solution.

Si a eſt la moitié de la ſomme des moyens, & x la moitié de leur différence, ils ſeront exprimés par $a-x$, & $a+x$, & on a par la queſtion $a-3x+a-x+a+x+a+3x=b$, $\overline{a-3x}^2+\overline{a-x}^2+\overline{a+x}^2+\overline{a+3x}^2=c$: ainſi par réduction $4a=b$, & $4a^2+20x=c$: donc $a=\frac{b}{4}=14$, & $x=\sqrt{\frac{c}{20}-\frac{a^2}{5}}=2$: donc les nombres ſont 8, 12, 16 & 20. En procédant de la même maniere, le problême peut ſe réſoudre quand la progreſſion a un nombre pair n quelconque de termes; car la ſomme des quarrés des deux moyens ($a+x$ & $a-x$) étant $2\times a^2+x^2$, & la ſomme des quarrés des deux termes adjacents à ceux-ci étant $2\times a^2+9x^2$ &c., il s'enſuit que $2\times a^2+x^2$

$+ 2x\overline{a^2} + 9x^2 + 2x\overline{a^2} + 25x^2 +$ &c. $= c$, laquelle équation eſt réduite en prenant $1 + 9 + 25 +$ &c. (continué juſqu'au nombre de termes $\frac{n}{2}$) $= f$, $na^2 + 2fx^2 = c$; ainſi $x = \sqrt{\frac{c - na^2}{2f}}$, dans laquelle a étant donné égal à $\frac{b}{n}$, la valeur de x eſt auſſi connue.

PROBLEME XCI.

Connoiſſant la ſomme b & la ſomme des quarrés c de cinq termes en progreſſion arithmétique, déterminer la progreſſion.

Solution.

Si a eſt le moyen, & x la différence commune, alors les cinq termes de la progreſſion ſeront $a - 2x$, $a - x$, a, $a + x$, $a + 2x$; ainſi $5a = b$ & $5a^2 + 10x^2 = c$ par les conditions ; de-là on trouve $a = \frac{b}{5}$, & $x = \sqrt{\frac{c}{10} - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{c}{10} - \frac{b^2}{20}}$. On peut auſſi réſoudre le problême de la même maniere, quand on propoſe un nombre impair n de termes. Car la ſomme des quarrés de deux termes ($a - x$ & $a + x$) adjacens à celui du milieu étant $2x\overline{a^2 + x^2}$, & celle des quarrés des deux termes adjacens à ceux-ci $2x\overline{a^2 + 4x^2}$, il eſt évident que $a^2 + 2x$

$a^2+x^2+2xa^2+4x^2$ &c.$=c$, dans laquelle prenant $1+4+9$ &c. (jusqu'à $\frac{n-1}{2}$ de termes) $=f$, on a $na^2+2fx^2=c$; ainsi $x=\sqrt{\frac{c-na^2}{2f}}$; & d'ailleurs $a=\frac{b}{n}$: donc les termes de la progression sont connus. On résoudroit le problême de la même maniere, si au lieu de la somme des quarrés on donnoit celle des cubes ou des quatriemes puissances.

PROBLEME XCII.

Un voyageur fit une route de 140 mille; le premier jour il fit 26 mille, le second 24, le troisieme 22, ainsi de suite en progression arithmétique décroissante de 2 mille parjour, en combien de tems a-t-il fini son voyage ?

Solution.

Soit $b=140$, $c=26$, chemin qu'il a fait le premier jour $d=2$ différence commune, & x égal au nombre des jours pendant lesquels il a voyagé. Par la nature de la question il est évident que le voyage du dernier jour sera plus court que le premier de $x-1$ fois la différence, & est donc exprimé par $c-x-1\times d$; mais on sait que la somme d'une progression arithmétique est

eſt égale à la ſomme du premier & du dernier terme multipliée par la moitié du nombre des termes : ainſi $c+c-x-1\times d\times\frac{x}{2}$ eſt égale à toute la route, par conſéquent $c+c-x-1\times d\times\frac{x}{2}=b$: donc $2cx-dx^2+dx=2b$, & $x^2-\frac{2c+d}{d}\times x=\frac{2b}{d}$; de-là $x=\pm\sqrt{\frac{2c+d^2}{4d^2}-\frac{2b}{d}}+\frac{2c+d}{2d}=7$.

PROBLEME XCIII.

Après que A eut marché pendant deux heures & trois quarts, à raiſon de 4 mille par heures ; B partit pour l'atteindre & fit 4 mille & demi la premiere heure, $4\frac{3}{4}$ la ſeconde, 5 la troiſieme ; enſorte qu'il gagnoit $\frac{1}{4}$ de mille chaque heure : en combien d'heures atteignit-il A ?

Solution.

Prenons $a=4$ la diſtance que A fait par heure, $b=11$ l'avance que A a par-deſſus B, $c=4\frac{1}{2}$ chemin que B a fait la premiere heure, $d=\frac{1}{4}$ différence commune, & x le nombre d'heures demandées ; alors il eſt évident (par le problême précédent) que le chemin fait par B dans la derniere heure, ſera $c+x-1\times d$, & que $2c+x-1\times d\times\frac{x}{2}$

exprimera tout ce chemin fait par B en x d'heures. Mais le chemin de A en x d'heures étant ax, tout le chemin fait par A eſt $ax+b$, qui étant égale (par la queſtion) à celui fait par B, on a $2c+\overline{x-1}\times d\times\frac{x}{2}=ax+b$, & par conſéquent $2cx+dx^2-dx=2ax+2b$, ou $x^2-\frac{2c-2a-d}{d}\times x=\frac{2b}{d}$ qui (en ſuppoſant $\frac{2c-2a-d}{d}=f$), donne $x=\sqrt{\frac{2b}{d}+\frac{f^2}{4}}-\frac{f}{2}=8$ le nombre demandé.

PROBLEME XCIV.

Trouver quatre nombres en progreſſion arithmétique, qui étant ajoutés à 2, 4, 8 & 15 reſpectivement, les ſommes ſoient en progreſſion géométrique.

Solution.

Soit x le premier nombre, & y la différence commune, alors les quatre nombres ſeront x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, & les quatre ſommes ſeront auſſi $x+2$, $x+y+4$, $x+2y+8$, $x+3y+15$; ainſi par la nature de la progreſſion géométrique, on aura

$\overline{x+2}\times\overline{x+2y+8}=\overline{x+y+4}^2$

$\overline{x+2}\times\overline{x+3y+15}=\overline{x+y+4}\times\overline{x+2y+8}$

c'eſt-à-dire en multipliant & tranſpoſant $\begin{cases} y^2+4y=2x \\ 2y^2+10y+2=5x \end{cases}$

& multipliant la derniere équation par 2, & la précédente par 5, on en tire $5y^2 + 20y = 4y^2 + 20y + 4$: donc $y^2 = 4$, & $y = 2$; de-là $x = 6$, & les trois autres nombres ſont 8, 10 & 12 reſpectivement; car 6, 8, 10 & 12 ſont en progreſſion, & $6+2$, $8+4$, $10+8$ & $12+15$ ſont en progreſſion géométrique.

PROBLEME XCV.

Le produit (*a*) & la ſomme des cubes (*b*) de deux nombres étant donnés, les déterminer.

Solution.

Soit x le plus grand, & y le plus petit, donc par la ſuppoſition $xy = a$ & $x^3 + y^3 = b$; ainſi élevant les deux équations, l'une au cube, & l'autre au quarré $x^3 y^3 = a^3$, & $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = b^2$, retranchant le quadruple de la premiere équation, de la ſeconde, le reſte ſera $x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = b^2 - 4a^3$; & extrayant la racine quarrée $x^3 - y^3 = \sqrt{b^2 - 4a^3}$, qui étant ajoutée à la ſeconde équation, donne $2x^3 = b + \sqrt{b^2 - 4a^3}$, par conſéquent

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3}}, \text{ \& }$$

$$y = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3}}}.$$

Le même autrement.

Puiſque $xy=a$ on a $y=\frac{a}{x}$, donc $x^3+\frac{a^3}{x^3}=b$ par la queſtion : ainſi $x^6+a^3=bx^3$ ou $x^6-bx^3=-a^3$, donc en achevant le quarré $x^6-bx^3+\frac{b^2}{4}(=\frac{bb}{4}-a^3)+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2-4a^3}{4}$ & extrayant la racine $x^3-\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{b^2-4a^3}{2}}$; ainſi $x^3=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^3}$, & par conſéquent les valeurs de x & de y ſont les mêmes que ci-devant.

De l'une ou l'autre de ces ſolutions on peut déduire un théorême général pour la ſolution des équations cubiques ſelon la méthode de Cardan ; car prenant $z=x+y$, & élevant chaque membre à la troiſieme puiſſance, on a $z^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ $=x^3+y^3+3xy\times x+y=x^3+y^3+3\,a\times z$ (en ſubſtituant pour xy & $x+y$ leurs égales a & z) & en tranſpoſant on a $z^3-3az=x^3+y^3=b$; mais on a vu plus haut que $z=x+y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^3}}+\frac{a}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^3}}}$ laquelle valeur eſt par conſéquent la racine de l'équation $z^3-3az=b$; ainſi la racine de l'équation $z^3+cz=b$ (ou le ſecond terme eſt poſitif) ſera auſſi donnée en faiſant $-3a=c$, &

le ſubſtituant pour a, ce qui donne

$$z=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^3}{3}}}-\frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^3}{3}}}}$$

PROBLEME XCVI.

La différence de deux nombres étant (4), & la ſomme de leurs cubes (2240), trouver ces deux nombres.

Solution.

Soit x la moitié de leur ſomme, & d la moitié de leur différence, alors le plus grand eſt $x+d$, & le plus petit $x-d$: donc $\overline{x+d}^3$ & $\overline{x-d}^3=2240$, c'eſt-à-dire, $2x^3+6d^2x=2240$, ou $x^3+3d^2x=\frac{2240}{2}$; & prenant $c=3d^2$ ($=12$) & $b=\frac{2240}{2}=1120$, elle devient $x^3+cx=b$; ainſi par le théorême général du dernier problême,

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^3}{3}}}-\frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^3}{3}}}}=10:$$

donc $x+d=12$, & $x-d=8$.

PROBLEME XCVII.

On propoſe de diviſer 24 ($2a$) en deux

parties, telles que la différence de leurs cubes ſoit 3584(2b).

Solution.

Soit $a+x$ la plus grande partie, & $a-x$ la plus petite, alors $\overline{a+x}^3-\overline{a-x}^3=2b$ c.à.d. $6a^2x+2x^3=2b$, ou $x^3+3a^2x=b$, prenant $c=3a^2$ & $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^3}{3}}}=r$, elle deviendra $x^3+cx=b$, & $x-r+\frac{c}{r}=4$ par le théorême précédent. Ainſi 8 & 16 ſont les deux nombres cherchés.

PROBLEME XCVIII.

La ſomme des quarrés de deux nom étant donnée (208$=g$) & celle de leurs cubes (2240$=h$) trouver ces deux nombres.

Solution.

Je ſuppoſe que le plus grand eſt $x+y$, & le plus petit $x-y$ par la queſtion

$$2x^3+2y^2=g$$
$$2x^3+6y^2x=h,$$

retranchant la ſeconde équation de la premiere multipliée par $3x$; le reſte ſera $4x^3=3gx-h$, & par conſéquent $x^3-\frac{3gx}{4}+\frac{h}{4}=0$, ou (en ſubſtituant les nombres)

$x^2-156x+560=0$: donc les racines ſont 10, 4 & 14, entre leſquelles la premiere ſeulement eſt propre pour la queſtion, elle donne $y=\sqrt{\frac{1}{2}g-x^2}=2$: donc 12 & 8 ſont les deux nombres qui rempliſſent les conditions du problême.

Note. La réſolution de l'équation ci-deſſus par le théorême trouvé dans l'exemple précédent, eſt impoſſible, parce que la racine quarrée d'une quantité négative ne peut s'extraire.

PROBLEME XCIX.

La ſomme (*a*) & le produit continuel (*b*) de quatre nombres en progreſſion géométrique étant donnée, trouver les nombres.

Solution.

Si le plus petit des deux moyens eſt $x-y$ & le plus grand $x+y$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-y^2}{x+y}+x-y+x+y+\frac{x-y^2}{x+y}=a\\ \text{\& } x-y^2\times x+y^2=b \ldots\ldots\end{array}\right\}\text{par la queſtion ;}$$

dans la ſeconde de ces équations, prenant $c=\sqrt{b}$, & extrayant la racine quarrée, elle deviendra $x-y\times x+y=(x^2-y^2)=c$; de plus la premiere donne $x-y^3+2x\times x-y\times x+y+x+y^3=a\times x-y\times x+y$, ou $2cx+x-y^3+x+y^3=ac$ (par ſubſti-

tution) c'eſt-à-dire, $2cx+2x^3+6xy^2=ac$, ou $2cx+2x^3+6x\times x^2-c=ac$ (parce que $y^2=x^2-c$) ; ainſi $x^3-\frac{cx}{2}=\frac{ac}{8}$, de laquelle par le théorême (*ex.*96) on peut tirer la valeur de x.

PROBLEME C.

L'intérêt compoſé d'une certaine ſomme d'argent pour quatre ans, monte à 344 l. $\frac{81}{190}$; mais l'intérêt ſimple pour ce même tems & au même prix, alloit ſeulement à 320 liv. quelle eſt la ſomme & le prix de l'intérêt?

Solution.

Soit $a=344$ l. 81, $b=320$, & x l'intérêt de 1 l. pour une année, donc le ſimple intérêt de 1 l. pour quatre années eſt $4x$; & l'intérêt compoſé $1+x^4-1$, ou $4x+6x^2+4x+4x$, on aura donc par la nature de la queſtion $4x+6x^2+4x+4x$: $4x::a:b$, & par conſéquent $6x+4x^2+x^3=\frac{4a-4b}{b}=0,310125$; par la ſolution de cette équation, on trouve $x=0,05$: donc ce prix de l'intérêt eſt cinq pour cent, & la ſomme 1600 l.

PROBLEME CI.

La ſomme (a) & le produit (p) de deux

nombres étant donnée, trouver la ſomme de leurs quarrés, celle de leurs cubes, &c.

Solution.

Soient les deux nombres x & y, alors $\left.\begin{matrix} x+y=a \\ xy=p \end{matrix}\right\}$ la premiere étant quarrée, donne $x^2+2xy+y^2=a^2$, de laquelle ſouſtrayant le double de la ſeconde, le reſte ſera $x^2+y^2=a^2-2p$, ſomme de leurs quarrés. Cette équation multipliée par $x+y=a$, donne $x^3+xy\times x+y+y^3=a^3-2ap$, c'eſt-à-dire, $x^3+p\times a+y^3=a^3-2ap$ (à cauſe de $xy=p$ & de $x+y=a$), donc $x^3+y^3=a^3-3ap$, ſomme de leurs cubes.

Ayant multiplié la derniere équation par $x+y=a$, on trouvera $x^4+xy\times x^2+y^2+y^4=a^4-3a^2p$, ou $x^4-p\times a^2-2p+y^4=a^4-3a^2p$ (parce que $x^2+y^2=a^2-2p$); ainſi $x^4+y^4=a^4-4a^2p+2p^2$, ſomme des quatriemes puiſſances.

Multipliant encore celle-ci par $x+y=a$, elle donne $x^5+xy\times x^3+y^3+y^5=a^5-4a^3p+2ap^2$, ou $x^5+p\times a^3-3ap+y^5=a^5-4a^3p+2ap^2$: donc $x^5+y^5=a^5+5a^3p+5ap^2$, ſomme des cinquiemes puiſſances.

Ainſi la loi de continuation eſt manifeſte, étant telle, que la ſomme des prochaines

puiſſances ſupérieures ſe trouvera toujours en multipliant la ſomme des dernieres puiſſances par a, & ſouſtrayant du produit la ſomme des précédentes par p ; enſorte que la ſomme des puiſſances n^{es} (exprimée généralement), ou $x^n+y^n=a^n-na^{n-1}p+n\times\frac{n-3}{2}a^{n-4}p^2-n\times\frac{n-4}{2}\times\frac{n-5}{3}a^{n-5}p^3+n\times\frac{n-5}{2}\times\frac{n-6}{3}\times\frac{n-7}{4}a^{n-3}p^4$ —&c

PROBLEME CII.

La ſomme (a) & la ſomme des quarrés (b) de quatre nombres en progreſſion géométrique étant données, trouver ces nombres.

Solution.

Soit x & y les deux moyens, par la nature de la proportion continue, les deux extrêmes ſeront $\frac{x^2}{y}$ & $\frac{y^2}{x}$; on aura donc $\frac{x^2}{y}+x+y+\frac{y^2}{x}=a$, $\frac{x^4}{y^2}+x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=b$; prenant $x+y=a$ & $xy=z$, on a par la premiere équation $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=a-u$, donc $x^3+y^3=xy\times a-u$; mais parce que la ſomme des deux moyens (x & y) eſt égale à u, & leur produit à z, il eſt évident par le problême précédent que la ſomme de leurs quarrés (x^2+y^2) ſera égale à u^2-2z,

& celle de leurs cubes (x^3+y^3) à u^3-3uz: de même la ſomme des extrêmes étant déſignée par $a-u$, & leur produit par z, la ſomme de leurs quarrés ſera égale à $\overline{a-u}^2-2z$, & celle de leurs cubes à $a-u^3-3\overline{a-3u}\times z$ (mais cette derniere expreſſion eſt inutile pour ce cas préſent) ; en ſubſtituant ces différentes expreſſions dans notre ſeconde & derniere équation, on trouve $\overline{a-u}^2-2z+u^2-2z=b$, & $u^3-3uz=z\times\overline{a-u}$, qui étant réduites, donnent $2u^2-2au+a^2-b=4z$, & $u^3=\overline{2u+a}\times z$, & par conſéquent $\overline{2u+a}\times 2u^2+2ua+a^2-b=4u^3$; & réduiſant encore, on a $u^2+\frac{bu}{a}=\frac{a^2-b}{2}$: donc $u=\sqrt{\frac{a^2-b}{2}+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b}{2a}$: laquelle valeur fera connoître z, x & y.

PROBLEME CIII.

La ſomme de quatre nombres en progreſſion géométrique étant donnée, & celle de leurs cubes, déterminer ces nombres.

Solution.

Nommant les quantités comme dans le problême précédent, on aura les équations ſuivantes :

$\frac{x^2}{y}+x+y-\frac{y^2}{x}=a$ & $\frac{x^6}{y^3}+x^3+y^3+\frac{y^6}{x^3}=c$

mais la ſomme des cubes des deux moyens eſt $x^3+y=u-3uz$, & celle des cubes des deux extrêmes $\left(\frac{x^2}{y}\right.$ & $\left.\frac{y^2}{x}\right)$ eſt égale à $\overline{a-u}^3-3\overline{a-3u}\times z$: donc ſi on ſubſtitue ces valeurs dans la derniere équation, elle deviendra $u+\overline{a-u}-3az=c$; & par une ſemblable ſubſtitution, la premiere équation eſt réduite à $u^3=2u+a\times z$; ainſi chaſſant z des deux équations, & prenant $\frac{a^2}{3}-\frac{c}{3a}=d$, on aura $\overline{2u+a}\times u^2-\overline{au+d}=u^3$, ou $u^3-au^2-\overline{a^2-2d}\times u+ad=0$; d'où il eſt aiſé de tirer la valeur de u, ce qui fera connoître les autres quantités.

Le problême peut auſſi ſe réſoudre de la même maniere, ſi au lieu de la ſomme des cubes on donnoit celles des quatrieme, cinquieme, &c. puiſſances ; car la ſomme des puiſſances n^{es} des deux moyens, ou $x^n+y^n=u^n-nu^{n-2}z+n\times\frac{n-3}{2}u^{n-4}z^2$ &c. & celle des puiſſances n_{es} des deux extrêmes, eſt égale à $\overline{a-u}^n-n\times\overline{a-u}^{n-2}z+n\times\frac{n-3}{2}\overline{a-u}^{n-4}z^2$, &c. (à cauſe que la ſomme des racines eſt égale à $a-u$) : donc on a $u^n+\overline{a-u}^n-nz\times u^{n-2}+\overline{a-u}^{n-2}+\frac{n}{2}\times\frac{n-3}{2}z^2\times u^{n-4}+\overline{a-u}^{n-4}$, &c. $=c$; ſubſ-

tituant dans l'équation $\frac{u^3}{2u+a}$ à la place de z elle deviendra $u^n+\overline{a-u^n}-\frac{nu^3}{2u+a}\times\overline{u^{n-2}+\overline{a-u^{n-2}}}+\frac{n}{1}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{u^6}{2u+a^2}\times\overline{u^{n-4}+\overline{a-u^{n-4}}}$, &c. $=c$: ainſi u peut être trouvé.

PROBLEME CIV.

La ſomme (a) & la ſomme des quarrés (b) de cinq nombres en progreſſion géométrique étant données, déterminer ces nombres.

Solution.

Si x, z & y ſont les trois moyens pris dans cet ordre, alors $\frac{x^2}{z}$ ſera le premier nombre, & $\frac{y^2}{z}$ le dernier par la ſuppoſition $\left\{\begin{array}{l}\frac{x^2}{z}+x+z+y+\frac{y^2}{z}=a\\ \frac{x^4}{z^2}+x^2+z^2+y^2+\frac{y^4}{z^2}=b\end{array}\right\}$ prenant $u=x+y$, la premiere équation deviendra $\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}=a-u-z$: donc la ſomme des deux extrêmes étant $a-u-z$, & leur produit z^2, la ſomme de leurs quarrés ſera $\overline{a-u-z^2}-2z^2$; de plus la ſomme $(x+y)$ des deux moyens adjacens au terme du

milieu étant u, & leur produit z^2, la ſomme de leurs quarrés (x^2+y^2) ſera donc égale à u^2-2z^2 ; de façon, que ſubſtituant ces valeurs dans la ſeconde équation, elle donne $a-u-z^2-2z^2+u^2-2z^2+z^2=b$, & $\frac{u^2-2z^2}{z}=a-u-z$; ainſi $a^2-2au-2az+2u^2+2uz-2z^2=b$, & $az-u^2-uz+z^2=0$; ajoutant le double de la derniere à la premiere, on a $a^2-2au=b$, ainſi $u=\frac{a}{2}-\frac{b}{2a}$. Subſtituant cette valeur de u dans l'équation $az-u^2-uz+z^2=0$, celle de z ſera bien-tôt connue.

PROBLEME CV.

La ſomme de cinq nombres en progreſſion géométrique étant donnée, & celle de leurs cubes, déterminer ces nombres.

Solution.

Retenant les mêmes dénominations, & procédant comme dans le problême précédent, on a $a-u-z^3-3a-3u-3z\times z^2+u^3-3uz^2+z^3=b$, $az-u^2-uz+z^2=0$ (comme ci-deſſus); la premiere des deux équations étant réduite, deviendra $a^3-3a^2\times u+z+3a\times u^2+2uz-3u^2z-3uz^2+3z^3=b$; l'autre équation étant multipliée par $3z$, & ſouſtraite de celle-ci, donnera pour reſte

$a^3-3a^2\times u+z+3a\times u^2+2uz-z^2=b$: donc $u^2+2uz-z^2-a\times u+z=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{3}$. Mais par la ſeconde équation $u^2+2uz-z^2=az+uz$; ainſi par ſubſtitution $az+uz-a\times u+z=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{3}$, c'eſt-à-dire, $uz-az=\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{3}$, ou $az-uz=d$ (en prenant $\frac{a^2}{3}-\frac{b}{3a}=d$), de laquelle ſouſtrayant la ſeconde équation, le reſte eſt $u^2+z^2=d$; & mettant $\frac{az-d}{z}$ à la place de u (par la premiere équation) elle devient $\frac{az-d^2}{z^2}-z^2=d$, & par conſéquent $z^4-a^2-d\times z^2+2adz-d^2=0$; ainſi z ſera connu.

PROBLEME CVI.

La ſomme (a) de trois nombres quelconques, celle de leurs quarrés (b), & celle de leurs cubes (c) étant données, déterminer ces nombres.

Solution.

Les déſignant par x, y & z, on aura par la queſtion

$$\left.\begin{matrix}x+y+z=a\\x^2+y^2+z^2=b\\x^3+y^3+z^3=c\end{matrix}\right\}\text{ en tranſpoſant }\left\{\begin{matrix}x+y=a-z\\x^2+y^2=b-z^2\\x^3+y^3=c-z^3\end{matrix}\right.$$

Préſentement multipliant les deux pre-

mieres équations l'une par l'autre, on aura $x^3+x^2y+xy^2+y^3=ab-bz-az^2+z^3$, & cubant la premiere, on aura $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=a^3-3a^2z+3az^2-z^3$, qui, étant ſouſtraite du triple de la premiere, donne pour reſte $2x^3+2y^3=3ab-a^3+3a^2z-3bz-6az^2+4z^3=2c-2z^3$ par la troiſieme équation; on a donc $6z^3-6az^2-3\overline{a^2-3b}\times z=a^3-3ab+2c$, & par conſéquent $z^3-az^2+\frac{a^2-b}{2}\times z=\frac{a^3-3ab+2c.}{6}$.

Ainſi ayant mis des nombres à la place de a, b & c, les trois racines de l'équation, ou les valeurs de z, rempliront les conditions du problême.

Par exemple, ſoit $a=9$, $b=29$ & $c=99$, l'équation deviendra $z^3-9z^2+26z-24=0$, les trois racines dans ce cas ſont 2, 3 & 4, leſquels nombres ſont donc les trois valeurs de x, y & z dans les équations $x+y+z=9$, $x^2+y^2+z^2=29$, & $x^3+y^3+z^3=99$.

PROBLEME CVII.

La ſomme (*a*) de quatre nombres, celle de leurs quarrés (*b*), celle de leurs cubes (*c*), & celle de leurs quatriemes puiſſances (*d*) étant données, déterminer ces nombres.

Solution.

Solution.

Soient x, y, z & u les quatre nombres, & $A=a-u$, $B=b-u^2$, $C=c-u^3$, & $D=d-u^4$, donc par les conditions du problême

$$x+y+z=A,$$
$$x^2+y^2+z^2=B,$$
$$x^3+y^3+z^3=C,$$
$$x^4+y^4+z^4=D.$$

Maintenant ſi on ſouſtrait la ſeconde de ces équations du quarré de la premiere, on a $2xy+2xz+2yz=A^2-B$; & de la même maniere, ſi du quarré de la ſeconde on retranche la quatrieme, on a $2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2=B^2-D$; de plus ſi du quarré de la premiere de ces dernieres équations, on retranche le double de la derniere, le reſte ſera $8x^2yz+8y^2xz+8z^2xy=A^4-2A^2B-B^2+2D$, ou $8xyz\times x+y+z=A-2A^2B-B^2+2D$; ainſi $xyz=\frac{A^4-2A^2B-B^2+2D}{8A}$ (parce que $x+y+z=A$) multipliant la premiere & la cinquieme l'une par l'autre, elles donnent $2x^2y+2x^2z+2y^2x+2y^2z+2z^2x+2z^2y+6xyz=A^3-AB$; & multipliant la premiere & la ſeconde enſemble, on a pour produit $x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y=AB$: dont le double étant ôté de la précédente, il reſtera $6xyz-2x^3-2y^3-2z^3=A^3-3AB$, qui étant ajouté à

$2x^3+2y^3+2z^3=2C$, donne $6xyz=A^3-3AB+2C$, ainsi $\frac{A^3-3AB+2C}{6}=xyz=\frac{A^4-2A^2B-B^2+2D}{8A}$, & par conséquent en réduisant $A^4-6A^2B+8AC+3B^2-6D=0$, dans laquelle substituant les valeurs de A, B, C & D, & divisant par 24 on a $u^4-au^3+\frac{a^2-b}{2}\times u^2-\frac{a^3-3a^2b+2c}{6}\times u+\frac{a^4-6a^2b+8ac+3b^2-6d}{24}=0$, dont les racines étant trouvées, répondront aux conditions du problême.

PROBLEME CVIII.

Trouver le moindre nombre entier, qui étant divisé par 19, donne pour reste 7; mais étant divisé par 28, le reste soit 13.

Solution.

Soit $19x+7$ le nombre demandé, ainsi par la question $19x+7-13$, ou $19x-6$ doit se diviser par 28 sans reste. Mais il est sûr que $28x$ peut se diviser par 28: donc $9x+6$, différence entre $19x-6$ & $28x$, peut être aussi divisé par 28; mais on sait que tout nombre, ou toute quantité mesurant un tout, & une de ses parties, mesure aussi l'autre partie restante. Ainsi $18x+12$ double de $9x+6$ est divisible par 28,

ſi on le retranche de $19x-6$ *, le reſte $x-18$ ſera auſſi diviſible par ce même nombre; par conſéquent $x-18=0$, ou un multiple de 28; mais comme on demande la moindre valeur de x, on ſuppoſe $x-18=0$: donc $19x+7=349$.

PROBLEME CIX.

Une perſonne acheta pluſieurs oies & canards qui lui coûterent enſemble 8 l. 8 ſ. pour chaque oie il donna 26 ſols, & pour chaque canard 15 ſols, quel eſt le nombre de chaque eſpece?

Solution.

Soit x le nombre d'oies, & y celui des canards, ainſi par la ſuppoſition $26x+15y=168$ ſols : donc $y=\frac{168-26x}{15}=11-x-\frac{11x-3}{15}$, qui eſt un nombre entier par la nature du problême, donc $11x-3$ peut ſe diviſer exactement par 15; mais il eſt clair que $15x$ eſt diviſible par 15, & que ſon excès au-deſſus de $11x-3$, qui eſt $4x+3$, eſt auſſi diviſible par le même nombre. Multipliez cette derniere expreſſion par 3, & retranchez du produit la précédente ($11x-3$), de façon que x n'ait pour coeffi-

* Pour délivrer x de ſon coefficient.

cient que l'unité ; le reſte $x+12$ eſt encore diviſible par 15 ; par conſéquent x peut être égal à 3, ou à 3 ajouté à quelque multiple de 15, comme 18, 33, 48, &c. mais il eſt évident par la nature de la queſtion, que tous ces nombres, excepté le premier, ſont trop grands : donc le nombre des oies eſt 3, & celui des canards 6.

PROBLEME CX.

Quelqu'un ayant gagné au jeu un certain nombre de guinées, & étant interrogé s'il n'en gagnoit pas cent, répondit, j'en gagne moins ; & ſi le nombre de guinées que j'ai gagné eſt diviſé par 9, il reſtera 6 ; mais étant réduit en shillings, ſi on le diviſe par 39, le reſte ſera 12 La queſtion eſt de trouver le nombre de guinées qu'il avoit gagné.

Solution.

Soit $9x+6$ le nombre demandé, ainſi x doit être un nombre entier, alors le nombre de shillings étant $189x+126$, il eſt évident que $\frac{189x+126-12}{39}$, ou $4x+2+\frac{11x+12}{13}$ eſt un nombre entier, par conſéquent $11x+12$ eſt diviſible par 13.

Soit le nombre $12=n$ (afin d'abréger), alors $13x$ & $11x+n$ étant diviſibles par

13, leur différence $2x-n$ l'eſt auſſi, laquelle étant multipliée par 5, eſt égale à $10x-5n$ qui étant ſouſtraite de $11x+n$, le reſte $x+6n$, ou $x+72$ ſera diviſible par 13; mais $\frac{72}{13}=5+\frac{7}{13}$: donc $x+7$ peut auſſi être diviſé par 13, par conſéquent la valeur de x eſt égale à 6; mais comme celle de $9x+6$ ne peut ſurpaſſer 100, la valeur de x ne peut être plus grande que 6: donc le nombre demandé ne peut être que 60.

PROBLEME CXI.

Une perſonne, en échange d'un certain nombre de pieces étrangeres valant 17 liv. 6 ſols 8 deniers, a reçu un certain nombre de guinées qui ne paſſoit pas 50 & une livre de plus; on demande quelle étoit la ſomme changée, & quel étoit le nombre de guinées?

Solution.

Soit x le nombre des pieces étrangeres, & y celui des guinées, en multipliant tout par 3 pour faire diſparoître les fractions, on aura $52x=63y+3$, & $x=\frac{63y+3}{52}=y+\frac{11y+3}{52}$; ainſi $11y+n$ (ſuppoſant $n=3$) eſt diviſible par 52; de même que ſon quintuple $55y+5n$; & ſi de la derniere on ſouſtrait $52y$, le reſte multiplié par 4, donne

$12y+20n$, qui peut ſe diviſer par le même nombre; de même auſſi ſon excès $(y+19n)$ au deſſus de $11y+n$; mais $\frac{19n}{52}=\frac{57}{52}=1+\frac{5}{52}$: donc $y+5=52$, ou à quelqu'un de ſes multiples, & par conſéquent $y=47$, 99, 151, &c. Mais comme la valeur de y ne peut ſurpaſſer 50, tous les nombres, excepté le premier, ſont trop grands; ainſi il eſt évident que la perſonne a reçu 47 guinées & une livre en échange de 57 pieces étrangeres, valant 17 liv. 6 ſols 8 den. & que la ſomme totale étoit 988 liv.

PROBLEME CXII.

Quelqu'un a mis 6 liv. à vingt oiſeaux de différentes eſpeces, ſavoir poulets, pigeons & alouetes; les poulets lui coûtent 12 ſols, les pigeons 4, & les alouetes 1, combien y en avoit-il de chaque eſpece?

Solution.

Soient x, y & z les nombres demandés reſpectivement, alors par la queſtion

$$x+y+z=20$$
$$12x+4y+z=120;$$

ſouſtrayant la premiere de ces équations de l'autre, le reſte ſera $11x+3y=100$, donc $y=\frac{100-11x}{3}=33-3x-\frac{2x+1}{3}$. Mais puiſque $-2x+1$ eſt diviſible par 3; ſi on l'a-

joute à $3x$, leur ſomme $x+1$ ſera encore diviſible par 3 : donc x eſt égal à 2, ou à 2 ajouté à quelque multiple de 3, c'eſt-à-dire, 2, 5, 8, 11, 14, &c. mais comme ni y, ni z ne peuvent ſurpaſſer 18 (par la queſtion) tous les nombres au-deſſus ou au-deſſous de 8 ſe négligeront, parce qu'ils donnent des valeurs de y trop grandes ou trop petites. Mais ſi on prend $x=8$, on aura $y=4$, $z=8$ qui ſont les nombres cherchés.

PROBLEME CXIII.

Déterminer les façons poſſibles de payer 1200 liv. en guinées & en moidores ſeulement.

Solution.

Soit x le nombre des guinées, & y celui des moidores, alors par les conditions du problême $21x+27y=1200$, ou $7x+9y=400$; donc $x=\frac{400-9y}{7}=57-y-\frac{2y+1}{7}$; ainſi $-2y+1$ eſt diviſible par 7. On verra, en raiſonnant comme dans les exemples précédens, que $y+3$ eſt auſſi diviſible par le même nombre, & par conſéquent la moindre valeur de y eſt 4, & la valeur correſpondante de $x=57-y-\frac{2y+1}{7}=52$.

Maintenant ayant trouvé la moindre valeur de y, & la plus grande de x, l'autre ſe trouve en ajoutant 7 (coefficient de x dans l'équation ci-deſſus) à la valeur de y, & retranchant 9 (coefficient de y) continuellement de la valeur de x, par ce moyen on aura 6 ſolutions poſſibles, ſavoir:

$x=52, 43, 34, 25, 16$ ou 7.
$y=4, 11, 18, 25, 32$ ou 39.

PROBLEME CXIV.

Trouver en combien de façons il eſt poſſible de payer 400 liv. en demi-guinées, & en demi-écus eſtimés 2 liv. 10 ſols.

Solution.

Soit x le nombre des demi-guinées, & y celui des pieces de 2 liv. 10 ſols, on aura $21x+5y=800$: donc $y=\frac{800-21x}{5}=160-4x-\frac{x}{5}$. Ainſi il eſt évident que x eſt égal à 5, ou a un de ſes multiples : donc les valeurs cherchés de x étant 5, 10, 15, 20, 25, 30 ou 35, celles de y correſpondantes ſeront 139, 118, 97, 76, 55, 34 & 13 reſpectivement, de ſorte qu'il y a ſept différentes ſolutions à ce problême.

PROBLEME CXV.

Une compagnie de vingt perſonnes con-

ſiſtant en hommes, femmes & enfans dépenſa 20 liv. chaque homme a payé 46 ſols, chaque femme 13 ſols, & chaque enfant 8 ſols, combien y avoit-il de perſonnes de chaque dénomination?

Solution.

Soient x, y, z les trois nombres cherchés reſpectivement, de ſorte que par la queſtion $\begin{cases} x+y+z=20 \\ 46x+13y+8z=400 \end{cases}$; & ſouſtrayant 8 fois la premiere de la ſeconde, on a pour reſte $38x+5y=240$: donc $y=48-7x-\frac{3x}{5}$, qui par la nature du problême doit être un nombre entier: donc $3x$ eſt diviſible par 5, donc $x=5$, $y=10$, & $z=5$.

PROBLEME CXVI.

Trouver un nombre, qui étant diviſé par 28, donne pour reſte 19; mais qui étant diviſé par 19, donne pour reſte 15; & qui diviſé par 15, laiſſe pour reſte 11.

Solution.

Soit $28x+19$ le nombre cherché, ou x ſelon la premiere condition du problême doit être un nombre entier; & on voit par la ſeconde que $28x+19-15$ eſt diviſible par 19. Ainſi (ſuivant la méthode obſer-

vée dans les exemples précédents) la moindre valeur de x eſt égal à 8 ; enſorte que $19z+8$ (où z dénote zéro ou un autre nombre entier quelconque) eſt une valeur générale de x, répondant aux deux premieres conditions ; la ſubſtituant donc à la place de x, l'expreſſion en deviendra $5327+243$; ainſi $5327+243$ eſt diviſible par 15, la moindre valeur de z ſera 14, & $15n+14$ ſera une valeur générale de z, qui, ſubſtituée dans $5327+243$, donne $7980n+7691$ pour une ſolution générale du problême, dans laquelle n peut être pris égal à zéro, ou à un nombre entier quelconque.

PROBLEME CXVII.

Trouver trois nombres en raiſon de 5, 7 & 9, qui étant diviſés par 11, 13, 15, donnent pour reſte 1, 2, & 3 reſpectivement.

Solution.

Soient $5x$, $7x$ & $9x$ les trois nombres demandés, alors par la queſtion $5x-1$, $7x-2$, & $9x-3$ ſont reſpectivement diviſibles par 11, 13 & 15 ſans aucun reſte.

Mais on trouvera (en procédant comme dans les problêmes précédens) que la valeur de x répondant à la premiere condition, eſt 9 : donc $9+11z$ (ſuppoſant z un

nombre entier) ſera une valeur générale de x répondant à la même condition. Subſtituant donc cette valeur dans la ſeconde & troiſieme expreſſion, qui par ce moyen deviendra $77z+61$ & $99z+78$, alors comme la premiere eſt diviſible par 13, la moindre valeur de z, pour remplir cette condition, ſera auſſi 9. C'eſt pourquoi ſi on ſubſtitue $9+13u$ (qui eſt une valeur générale de z) dans la derniere de ces expreſſions elle deviendra $13u+9\times99+78$, qui étant diviſée par 15, le tiers ou $13u+9\times33+26=429u+323$ eſt par conſéquent diviſible par 15; ainſi par $u=3$, donc $z=13u+9=48$ & $x=11z+9=537$, de ſorte que les 3 moindres nombres répondans aux conditions du problême ſont 2685, 3759 & 4833.

PROBLEME CXVIII.

Suppoſant $6x+7y+8z=100$, on demande de trouver toutes les valeurs poſſibles de x, y & z en nombres entiers.

Solution.

Dans ces ſortes d'équations où il y a trois ou plus de quantités indéterminées & une ſeule équation, il eſt à propos de commencer par chercher les limites de ces quantités. Ainſi parce que $x=\frac{100-7y-8z}{6}=16-$

$y-z-\frac{y+2z-4}{6}$, il eſt évident que x ne peut être pris plus grand que 14, de même on verra que y ne peut être plus grand que 12, & z plus grand que 10.

Maintenant comme x eſt un nombre entier (par la queſtion) $y+2z-4$ eſt donc diviſible par 6; & comme $2z$ & 4 ſont deux nombres pairs, il eſt sûr que y l'eſt auſſi (puiſqu'un nombre impair ne peut être diſé exactement par un nombre pair) ſuppoſant donc y égal à 2, le moindre de tous les nombres pairs, $y+2z-4$ deviendra $2z-2$, qui étant diviſible par 6, il eſt certain que $z-1$ (ſa moitié) eſt diviſible par 3, & par conſéquent les valeurs de z (en ſuppoſant $y=2$) ſont 1, 4, 7, 10, on trouvera que les valeurs correſpondantes de x ſont 13, 9, 5, 1.

Soit préſentement $y=4$, alors $y+2z-4=2z$ dans ce cas z ſera égal à 3, 6, 9; mais les deux premieres ſeulement ſerviront, la derniere donnant $x=0$.

Prenant $y=6$, & procédant de la même maniere, on aura deux autres ſolutions, dans leſquelles z ſera égal à 2 & 5, & x à 7 & 3; enfin $y=8$ on trouvera encore deux ſolutions. Il y en a donc dix en tout, & la queſtion n'en admet pas d'autres, les voici en ordre :

y	z				x			
2	1	4	7	10	13	9	5	1
4	3	6			8	4		
6	2	5			7	3		
8	1	4			6	2		

PROBLEME CXIX.

Si $17x+19y+21z=400$, déterminer toutes les valeurs poſſibles de x, y & z en nombres entiers poſitifs.

Solution.

Lorſque les coefficiens des quantités indéterminées, x, y & z ſont à peu près égaux, comme dans cet exemple, il faudra ſuppoſer $x+y+z=m$; alors ſouſtrayant 17 fois cette derniere de la précédente, on a $2y+4z=400-17m$; & ſouſtrayant l'équation donnée de 21 fois $x+y+z=m$, le reſte ſera $4x+2y=21m-400$: donc puiſque y & z ne peuvent être moindres que l'unité, il eſt certain que par la premiere de ces équations $400-17m$ ne peut être moindre que 6, donc m ne peut être plus grand que $\frac{400-6}{17}$ ou 23, de même à cauſe que la ſeconde équation $21m-400$ ne peut être moindre que 6; il eſt évident que m ne peut être moindre que $\frac{400+6}{21}$ ou 19: donc

19 & 23 ſont les limites de m dans ce cas. Ceci étant déterminé, ſi on tranſpoſe $4x$ dans la derniere équation, & qu'on diviſe le tout par 2, on aura $y=10m-200-2x+\frac{m}{2}$, qui étant un nombre entier par la queſtion, il eſt évident que $\frac{m}{2}$ eſt auſſi un nombre entier, & par conſéquent m un nombre pair, dont les limites étant 19 & 23, il ne peut être que 20 ou 22 : ſoit donc $m=20$, alors $y=10-2x$ & $z=m-x-y=10+x$ dans leſquelles prenant x égal à 1, 2, 3 & 4 ſucceſſivement, on aura y égal à 8, 6, 4, 2, & z égal à 11, 12, 13, 14 reſpectivement, qui ſont qnatre des ſolutions demandées.

Prenant encore $m=22$, alors $y=31-2x$, & $z=x-9$, dans leſquelles faiſant ſucceſſivement x égal à 10, 11, 12, 13 14 & 15, y ſera 11, 9, 7, 5, 3 & 1, & $z=1, 2, 3, 4, 5$ & 6 reſpectivement : donc on a les dix réponſes ſuivantes qui ſont toutes celles dont la queſtion eſt ſuſceptible.

$x=1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15.$
$y=8, 6, 4, 2, 11, 9, 7, 5, 3, 1.$
$z=11, 12, 13, 14, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

PROBLEME CXX.

Trouver deux nombres dont la différence des quarrés ſoit 77.

Solution.

Soit x le plus petit nombre, & $x+m$ le plus grand, & ſoit le nombre donné a, on a $\overline{x+m}^2-x^2=a$, c'eſt-à-dire, $2mx+m^2=a$, & par conſéquent $x=\frac{a-m^2}{2m}=\frac{a}{2m}-\frac{m}{2}$; ainſi $x+m=\frac{a}{2m}+\frac{m}{2}$ ou $\frac{a+m^2}{2m}$. Mais dans le cas propoſé $a=77$; donc $x=\frac{77}{2m}-\frac{m}{2}$ & $x+m=\frac{77}{2m}+\frac{m}{2}$, qui étant les nombres demandés, il eſt évident premierement que m eſt un diviſeur de 77; que $\frac{77}{m}$ eſt plus grand que m, par conſéquent m eſt moindre que 9; mais les diviſeurs de 77, au-deſſous de 9, ſont 1 & 7, qui étant mis ſucceſſivement à la place de m, donneront 33 & 2 pour les valeurs correſpondantes de x, & 94 & 9 reſpectivement pour celles de $x+m$, de façon que ce problême pour ce cas ci n'a que deux ſolutions.

PROBLEME CXXI.

Trouver un nombre, auquel ayant ſucceſſivement ajouté 12 & 25, les ſommes ſoient des quarrés.

Solution.

Soit z le nombre demandé, x & $x+m$

les racines des deux quarrés, alors par la queſtion $\begin{cases} z+12=x^2 \\ z+25=\overline{x+m}^2 \end{cases}$ ſouſtrayant la premiere de ces équations de l'autre, elles donnent $13=\overline{x+m}^2-x^2=2mx+m^2$; donc $x=\frac{13}{2m}-\frac{m}{2}$, qui étant un nombre entier, m doit être égal à 2; ainſi $x=6$ & $z=x^2-12=24$.

PROBLEME CXXII.

Trouver trois nombres entiers, de façon que la ſomme des quarrés des deux moindres ſoit égal au quarré du plus petit.

Solution.

On voit par l'avant dernier problême, que la différence des quarrés de $\frac{a+m^2}{2m}$ & $\frac{a-m^2}{2m}$ eſt égale à a, ou $\overline{\frac{a+m^2}{2m}}^2-\overline{\frac{a-m^2}{2m}}^2=a$, quelles que ſoient les valeurs de a & m, par conſéquent il eſt évident que $\overline{x+m^2}^2=\overline{a-m^2}^2+4m^2a$.

Mais, puiſqu'on demande que $4m^2a$ ſoit un nombre quarré auſſi bien que les deux autres, il faut que a le ſoit auſſi.

Soit donc $a=n^2$, l'équation deviendra $\overline{n^2+m^2}^2=\overline{n^2-m^2}^2+\overline{2mn^2}^2$, dans laquelle m & n ſont des nombres entiers pris à volonté; ainſi

ainſi par exemple, ſoit $m=1$ & $n=2$: alors $5^2=3^2+4^2$. Soit encore $m=2$, $n=3$, on trouvera $13^2=5^2+12^2$. Enfin ſi on ſuppoſe $m=2$ & $n=5$, les trois nombres ſeront $29^2=21^2+20^2$.

PROBLEME CXXIII.

Trouver trois nombres entiers dont les quarrés ſoient en progreſſion arithmétique.

Solution.

Soit x, $x+m$ & $x+n$ les trois nombres demandés. Par la nature du problême $\overline{x+m}^2-x^2=\overline{x+n}^2-\overline{x+m}^2$. Ainſi $x=\frac{n^2-2m^2}{4m-2n}$. Suppoſant $4m-2n=a$, & $n^2-2m^2=b$; alors $x=\frac{b}{a}$, $x+m=\frac{b+am}{a}$ & $x+n=\frac{b+an}{a}$. Maintenant comme les quarrés de $\frac{b}{a}$, $\frac{b+am}{a}$, $\frac{b+an}{a}$ ſont en progreſſion arithmétique, il eſt évident que les quarrés de leurs équimultiples b, $b+am$, & $b+an$ y ſont auſſi. Ainſi prenant ſucceſſivement différens nombres entiers pour m & n, on aura autant de ſolutions qu'on voudra. Par exemple, ſi $m=2$ & $n=3$, a égal à 2 & b à 1,

les trois nombres ſont 1, 5 & 7; mais ſi $m=3$ & $n=5$, alors on aura 7, 13 & 17 pour une autre ſolution.

PROBLEME CXXIV.

Suppoſant l'équation $x^2=z^2+az+b$ (dans laquelle a & b ſont connues) trouver les valeurs de x & z en nombres entiers s'il eſt poſſible.

Solution.

Soit $x=z+m$, alors ſubſtituant $z^2+2mz+m^2=z^2+az+b^2$; par conſéquent $z=\frac{m^2-b}{a-2m}$, dans laquelle valeur ſuppoſant $a-2m=n$ ou $m=\frac{a-n}{2}$, elle deviendra $\frac{a^2-2an+n^2-4b}{4n}=\frac{1}{4}\times\frac{a^2-4b}{n}-2a+n$; d'où il eſt évident que pour que la valeur ſoit un nombre entier, il faut que n ſoit un diviſeur de la quantité donnée a^2-4b, & par conſéquent pair ou impair ſuivant que a le ſera.

Exemple. Je ſuppoſe l'équation donnée $x^2=z^2+20z$. Donc $a=20$ & $b=0$, & on a $z=\frac{1}{4}\times\frac{400}{n}=40+n$. Les di-

viſeurs pairs de 400 ſont 2, 4, 8, 10, &c. le ſecond donnera pour valeurs de z & x, 16 & 24 reſpectivement.

Soit l'équation donnée $x^2 = z^2 + 100z + 1000$, on a ici $z = \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{6000}{n} - 200 + n}$; & les diviſeurs pairs de 6000, ſont 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, &c. entre leſquels 4, 12 & 20 réuſſiſſent, prenant le dernier qui détermine les moindres valeurs $z = 30$ & $x = 70$.

PROBLEME CXXV.

Ayant l'équation $x^2 = a^2 + bz + cz^2$ où les quantités a, b & c ſont données, trouver les valeurs de x & z en nombres entiers.

Solution.

Soit $x = a + mz$; alors $\sqrt{a + mz}^2 = a^2 + bz + cz^2$, c'eſt-à-dire $a^2 + 2amz + m^2z^2 = a^2 + bz + cz^2$. Ainſi $z = \frac{b - 2am}{m^2 - c}$: d'où il ſuit que pour avoir une valeur poſitive, m doit être pris entre $\sqrt{c}$ & $\frac{b}{2a}$.

Ainſi ſuppoſant que l'équation propoſée devienne $x^2 = 64 - 12z + 5z^2$, la valeur de m dans ce cas doit être moindre

que $\sqrt{5}$ & plus grande que $-\frac{12}{16}$ qu'on prenne donc ſucceſſivement 2 & 1 ; ainſi $\frac{-12-16m}{m^2-5}$ ou ſon égal $\frac{16m-12}{5-m^2}$ qui eſt ici la valeur de z, ſera égal à 44 & 7 reſpectivement, & les valeurs de $x=a+mz$ ſeront 96 & 15.

Fin de la premiere Partie.

ÉLÉMENS D'ANALYSE PRATIQUE.

SECONDE PARTIE.

Recueil de Problêmes Géométriques réſolus par Algébre & par Géométrie.

Probleme premier.

Connoissant dans un triangle rectangle ABC, *un côté* CB, *& la différence entre l'autre côté* AB *& l'hypothénuſe* AC; *connoître les autres côtés.* (Figure 1re).

Solution algébrique.

Soit CB = a, AB = x, & l'hypothénuſe AC = $x + b$ (ſuppoſant b la différence donnée) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, c'eſt-à-dire, $x^2 + 2xb + b^2 = x^2 + a^2$: donc

$2bx = a^2 - b^2$, par conſéquent $x = \frac{a^2 - b^2}{2b} = \frac{a^2}{2b} - \frac{b}{2}$; donc $AC = x + b = \frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2}$.

Solution géométrique.

Si ſur AB prolongée on prend BD égale à la différence donnée, & qu'on mene DC, il eſt évident que AD ſera égale à AC, & l'angle ACD égal à l'angle D.

Donc, ayant pris BD, comme il a été dit ci-deſſus, élevé BC perpendiculaire & joint les points C & D, ſi on mene CA qui faſſe avec CD un angle ACD égal à l'angle D; ou que du milieu de CD on éleve la perpendiculaire EA, alors l'interſection de l'une ou l'autre de ces lignes avec DB prolongée, détermine le triangle.

De cette conſtruction on peut tirer un théorême pour la ſolution numérique, ſemblable à celui qu'on a tiré par l'algébre; car les triangles ADE & CDB ayant chacun un angle droit & l'angle D commun, ſont ſemblables. Donc $DB : DC :: DE (\frac{1}{2}DC) : AD (AC) = \frac{\overline{DC}^2}{2DB} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2}{2BD} = \frac{\overline{BC}^2}{2BD} + \frac{BD}{2}$ comme ci-deſſus.

PROBLEME II.

L'hypothénuſe AC *& la différence des côtés* AB, BC *d'un triangle rectangle* ABC *étant données, déterminer ces côtés.* (Fig. 2).

Solution algébrique.

Prenant $AC = a$, $AB = x$ & $BC = x - b$, on $a\ x^2 + \overline{x - b}^2 = a^2$, c'eſt-à-dire $2x^2 - 2bx + b^2 = a^2$; ainſi $x^2 - bx = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$, & par conſéquent $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b$.

Solution géométrique.

Si ſur AB on prend AD égale à la différence donnée, & qu'on mene DC; alors DB ſera égale à BC, & l'angle BDC à BCD, c'eſt-à-dire, qu'il ſera de 45 degrés.

Prenant donc AD égal à la différence, & menant une ligne DE qui faſſe un angle BDE de 45 degrés, du point A pris pour centre avec un rayon AC, je décris un arc qui coupera DE en C, de ce point j'abaiſſe ſur AD prolongée une perpendiculaire, alors ABC eſt le triangle demandé.

La ſolution numérique, ſuivant cette

conſtruction, eſt très-facile par la Trigonométrie, car deux côtés & un angle d'un triangle ADC étant donnés, les deux autres ſe pourront connoître, & alors tous les angles & un côté AC du triangle en queſtion étant connus, les autres côtés AB & BC pourront être déterminés.

PROBLEME III.

La baſe AB *& la perpendiculaire* CD *d'un triangle* ACB *étant données, trouver le côté du quarré inſcrit.* (Fig. 3).

Solution algébrique.

Soit $CD = a$, $AB = b$ & $DI = EF = x$, alors $CI = a - x$ à cauſe des triangles ſemblables ABC, ECF, on a $a : b :: a - x : x$, donc $ax = ab - bx$, & par conſéquent $x = \frac{ab}{a+b}$.

Solution géométrique.

La raiſon de EH à EA eſt donnée comme CD eſt à CA, EF eſt donc à EA dans la même raiſon; & ſi on mene CL parallèle à EF, & qui rencontre AF prolongée en L, il eſt évident par les triangles ſemblables que CL ſera toujours à CA dans la raiſon donnée; donc CL : CA :: CD : CA, & par conſéquent CL =

CD; ainſi la conſtruction eſt manifeſte.

PROBLEME IV.

Déterminer les côtés d'un rectangle EFGH *inſcrit dans un triangle* ABC, *connoiſſant le rapport de ſon aire à celle du triangle.* (Fig. 4).

Solution algébrique.

Soit la perpendiculaire $CD = a$, la baſe $AB = b$, la hauteur EH du rectangle égale à x, & la raiſon de ABC à EFGH celle de m à n.

Les triangles ſemblables ABC & EFC donnent $CD\,(a) : AB\,(b) :: CI\,(a - x) : EF = \frac{ba - bx}{a}$; donc $EF \times EH = \frac{abx - bx^2}{a}$; & par conſéquent $m : n :: \frac{ab}{2} : \frac{abx - bx^2}{a}$ par la queſtion; ainſi $ax - x^2 = \frac{na^2}{2m}$; donc $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{na^2}{2m}}$.

Solution géométrique.

Le rectangle HF étant au triangle ABC en raiſon donnée, & le dernier étant auſſi donné, on connoîtra la grandeur du premier. Suppoſant donc qu'il ſoit exprimé par un rectangle ABPL ſur la baſe AB,

donc la hauteur KD eſt à la moitié de celle du triangle dans la même raiſon donnée.

Mais il eſt évident que le triangle DI× EF eſt au rectangle DI×IC dans la raiſon donnée de EF à IC, ou de AB à CD, & que DK×AB eſt à DK×CD dans la même raiſon ; donc les antécédens étant égaux, les conſéquens le ſont auſſi, c'eſt-à-dire, DI×IC=DK×CD, d'où on tire cette conſtruction. Décrivez ſur CD & CK, deux demi-cercles, & par le point M où la circonférence du dernier coupe AB, menez MN parallèle à DC coupant le premier en N ; alors MN ſera la hauteur du rectangle demandé. Puiſque DI× $\overline{CI} = \overline{IN}^2 = \overline{DM}^2$ =DK×CD. Il eſt à remarquer que ce problême devient impoſſible lorſque MN ne rencontre point le plus petit demi-cercle, c'eſt-à-dire, quand le rectangle donné eſt plus grand que la moitié du triangle. La même choſe eſt auſſi évidente par la ſolution algébrique, car alors $\frac{a^2}{4} - \frac{na^2}{2m}$ devient négatif.

PROBLEME V.

Diviſer une ligne en deux parties, de façon que leur rectangle ſoit égal à une grandeur donnée. (Fig. 5).

Solution algébrique.

Soit la ligne donnée AB = a, AC = x, & la grandeur donnée repréſentée par un quarré dont le côté eſt BE, ou DE = b: alors $x \times a - x = b^2$; ou $x^2 - ax = b^2$; ainſi $x = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} + \frac{a}{2}$.

Solution géométrique.

Si ſur AB pris pour diametre, on décrit un demi-cercle, il eſt évident qu'une perpendiculaire FC abaiſſée du point où DE coupe la circonférence, coupera la ligne AB au point demandé. Il eſt aiſé de voir que la quantité donnée ne peut être plus grande que le quarré de la moitié de la ligne.

PROBLEME VI.

A une ligne donnée AB, *ajouter une autre ligne* BC, *de façon que le rectangle de la ligne, plus l'ajoutée par l'ajoutée, ſoit égal à une grandeur donnée.* (Fig. 6).

Solution algébrique.

Soit AB = a, BC = x, & le côté du quarré donné BEDH, exprimant la grandeur donnée, égal à b, on aura $a + x \times x = b^2$; par conſéquent $x = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{1}{2}a$.

Solution Géométrique.

Si ſur AB on décrit un demi-cercle, & qu'on ſuppoſe avoir mené la tangente CF: il eſt évident que $\overline{CF}^2 = AC \times BC = \overline{BE}^2$ par la ſuppoſition; & par conſéquent CF = DE: donc OF étant égal à OB, il s'enſuit que OE & OC le ſont auſſi; ainſi ſi du milieu de AB on mene EO, & qu'on prenne OC = EO, le problême eſt réſolu.

PROBLEME VII.

Diviſer une ligne donnée AB *en deux parties, tellement que le rectangle d'une de ſes parties par une ligne donnée* BD, *ſoit égal au quarré de l'autre.* (Fig. 7).

Solution algébrique.

Si $AB = a$, $BD = b$ & $BC = x$, alors $AC = a - x$: &, par la queſtion, $x^2 = \overline{a - x} \times b$; ainſi $x^2 + bx = ab$; & par conſéquent $x = \sqrt{ab + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$.

Solution géométrique.

Puiſque $\overline{BC}^2 = AC \times BD$, par la ſuppoſition, il s'enſuit, en ajoutant de part &

d'autre $BC \times BD$, que $\overline{BC}^2 + BC \times BD = AC \times BD + BC \times BD$; ou que $BC \times CD = BD \times AB = \overline{BE}^2$, ayant pris BE moyen proportionnel entre BD & AB : mais le rectangle de $BC \times CD$ (ſi on décrit un demi-cercle ſur le diametre BD) eſt égal au quarré de la tangente CG. Ainſi $\overline{CG}^2 = \overline{BE}^2$, & par conſéquent $CG = BE$; donc FG étant auſſi égal à FB, il s'enſuit que $FC = FE$. Ainſi la méthode pour la conſtruction eſt évidente.

PROBLEME VIII.

Trouver deux lignes dont le rectangle ſoit égal à un rectangle donné ABFE, *& la ſomme de leurs quarrés à un quarré auſſi donné* ABCD. (Fig. 8).

Solution algébrique.

Soit $AB = BC = a$, $BF = AE = b$; & ſoient les deux lignes demandées x & y, alors par la queſtion $xy = ab$ & $x^2 + y^2 = a^2$: ainſi en ajoutant & ſouſtrayant de la ſeconde le double de la premiere, on a $\left\{\begin{matrix} x^2 + 2xy + y^2 = \overline{x+y}^2 = a^2 + 2ab \\ x^2 - 2xy + y^2 = \overline{x-y}^2 = a^2 - 2ab \end{matrix}\right\}$ donc $\left\{\begin{matrix} x+y = \sqrt{a^2+2ab} \\ x-y = \sqrt{a^2-2ab} \end{matrix}\right\}$ par conſéquent $\left\{\begin{matrix} 2x = \sqrt{a^2+2ab} + \sqrt{a^2-2ab} \\ 2y = \sqrt{a^2+2ab} - \sqrt{a^2-2ab} \end{matrix}\right\}$.

Solution géométrique.

Si ſur AB on décrit un demi-cercle qui coupe EF en H, alors les lignes AH & BH ſatisferont aux conditions du problême ; car l'angle AHB étant droit, on a $\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 =$ ABCD ; & AH × BH (égal deux fois le triangle ABH) = ABFE.

PROBLEME IX.

Trouver deux lignes dont le rectangle ſoit égal à un rectangle donné ABFE, *& la différence de leurs quarrés à un quarré auſſi donné* ABHD. (Fig. 9).

Solution algébrique.

Soit AB = a, BF = b, & ſuppoſant x la plus grande & y la plus petite des deux lignes demandées. Par la queſtion, on aura $xy = ab$ & $x^2 - y^2 = a^2$: donc par la premiere $y = \frac{ab}{x}$; qui étant ſubſtituée dans l'autre, donne $x^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2} = a^2$, ainſi $x^4 - a^2 x^2 = a^2 b^2$, & par conſéquent $x = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}}$. Donc y eſt auſſi connu.

Solution géométrique.

Il eſt évident en premier lieu que les deux lignes à trouver ſeront l'hypothénuſe, & un côté d'un triangle rectangle ABG dont l'autre côté eſt la ligne donnée AB; & puiſque le rectangle de ces deux lignes eſt ſuppoſé donné, on peut prendre un autre triangle ACG ſemblable à ABG; de façon que CG dans le premier & BG dans l'autre, ſoient côtés homologues.

Ainſi on a $CG \times AB = BG \times AG = AB \times BF$, & par conſéquent $CG = BF$.

De ſorte que $AC \times BC = \overline{CG}^2$ étant égal à $\overline{BF}^2$ dans ce cas-ci, la queſtion eſt réduite au ſixiéme problême: on aura donc la conſtruction ſuivante.

Que du milieu de AB on mene FO, & qu'après avoir pris OC = OF, on décrive un demi-cercle ſur AC, qui coupera BF en G; alors les lignes AG & BG ſont les lignes demandées.

PROBLEME X.

Un demi-cercle & ſon diametre AB *étant donnés, trouver un point* D *ſur la tangente* BC *élevée à l'extrémité de ce diametre, d'où ayant mené une ligne* DA *à l'autre extrémité, la partie* ED *de cette ligne*

qui eſt hors du cercle, ſoit égale à une ligne donnée BF. (Fig. 10).

Solution algébrique.

Soit AB=b, DE=BF=a & AD=x; ſoit auſſi menée la ligne BE, l'angle AEB étant droit, les triangles ADB, ABE ſont ſemblables; donc AD (x) : AB (b) :: AB (b) : AE ($x-a$); ainſi $x^2 - ax = b^2$, par conſéquent $x = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$.

Solution géométrique.

Puiſque $DA \times EA = \overline{AB}^2$, & que la partie DE de DA eſt égale à la ligne donnée BF, ce cas eſt encore réduit au ſixiéme problême.

De-là il eſt évident que ſi ſur BF on décrit un demi-cercle que par le centre on mene AH ſe terminant ſur la circonférence en H, & que du point A pris pour centre avec un rayon AH, on décrive un arc, il coupera BC au point demandé.

PROBLEME XI.

Connoiſſant la longueur de deux cordes AB, CD, *qui ſe coupent à angle droit, & la diſtance* OE *de leur point d'interſection au centre, connoître le diametre du cercle.* (Fig. 11).

Solution

Solution algébrique.

Du centre O du cercle sur les cordes données AB, CD, qu'on abaisse les perpendiculaires OF, OG, & qu'on mene les rayons OA & OD : alors faisant $AF = \frac{1}{2}AB = a$, $DG = \frac{1}{2}CD = b$, $OE = c$ & $AO = DO = x$, on aura $\overline{OF}^2 = x^2 - a^2$, & $\overline{OG}^2 = x^2 - b^2$, mais $\overline{OF}^2 + \overline{OG}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{OE}^2$, c'est-à-dire, $2x^2 - a^2 - b^2 = c^2$; par conséquent $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$; ainsi le diametre demandé sera $\sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$.

Solution géométrique.

$\overline{FE}^2 + \overline{DG}^2$ étant égal à $\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{AF}^2$, il est évident que $\overline{FE}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{DG}^2$. Il faudra donc construire sur l'hypothénuse OE un triangle rectangle dont les quarrés des deux côtés, ayent la même différence que celle des quarrés donnés $\overline{AF}^2$ & $\overline{DG}^2$. Pour cela on décrira sur OE un demi-cercle ; & des centres O & E, avec des rayons égaux à DG & AF respectivement, on décrira aussi deux arcs qui se couperont au point H, d'où abaissant sur OE la perpendicu-

laire HI, ſon point d'interſection avec la demi-circonférence ſera le ſommet du triangle demandé; car il eſt évident que $\overline{FE}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{EI}^2 - \overline{IO}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{DG}^2$ (par la conſtruction): donc ſi dans le prolongement de EF on prend FA, OA étant mené, ſera le rayon demandé.

PROBLEME XII.

Mener une ligne qui coupe deux cercles concentriques donnés OAB, OCD, *de façon que les parties de cette ligne qui deviennent cordes, ſoient en raiſon donnée.* (Fig. 12).

Solution algébrique.

Soit $OA = a$ le rayon du plus grand cercle, & $OC = b$ celui du plus petit; & $AB : CD :: m : n$, alors nommant x la diſtance OE de la corde au centre $\overline{AE}^2 = a^2 - x^2$, & $\overline{OC}^2 = b^2 - x^2$. Mais AE étant égal à $\frac{1}{2}$AB, & $CE = \frac{1}{2}CD$, il s'enſuit que $a^2 - x^2 : b^2 - x^2 :: m^2 : n^2$, & par conſéquent $n^2 a^2 - n^2 x^2 = m^2 b^2 - m^2 x^2$; ainſi $x = \sqrt{\frac{m^2 b^2 - n^2 a^2}{m^2 - n^2}}$, par le moyen de laquelle on peut connoître AB.

Solution géométrique.

Puiſque la raiſon de AE à CE eſt donnée, qu'on prolonge OC juſqu'à ce que OF ſoit à OC dans la raiſon donnée, alors, joignant les points A & F, les triangles CAF, CEO ſeront ſemblables; & par conſéquent l'angle CAF eſt droit; d'où on tire la conſtruction ſuivante. Ayant mené le rayon OC, & ſur ſon prolongement ayant pris OF de façon qu'il ſoit à OC comme AB:CD, qui eſt la raiſon donnée, alors ſi on décrit ſur CF une demi-circonférence, & que du point A où elle coupe le plus grand cercle, on mene par le point C une ligne droite, ce ſera la ligne demandée.

Il eſt évident par la ſolution algébrique & par celle-ci, que la raiſon de $m:n$ ou de AB:CD ne peut être moindre que celle de OA:OC, ſinon le problême eſt impoſſible.

PROBLEME XIII.

Inſcrire trois cercles égaux dans un autre cercle donné, de façon qu'ils ſe touchent mutuellement. & la circonférence du cercle donné. (Fig. 13).

Solution algébrique.

Qu'on joigne les centres des trois cer-

cles qu'on prolonge les lignes AO, BO juſqu'à la rencontre des lignes BC, AC aux points D & E. Soit a le rayon du cercle donné & x ceux des cercles cherchés; préſentement les triangles BCE, BOD étant ſemblables, & $CE = \frac{1}{2}BC$, il eſt clair que OD eſt auſſi égale à $\frac{1}{2}OB$. Mais $\overline{BO}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{BD}^2$, c'eſt-à-dire $a - x^2 - \frac{a - x^2}{4} = x^2$ qui étant réduite donne $x = \sqrt{12a^2} - 3a = a \times 2\sqrt{3} - 3$.

Solution géométrique.

Il eſt évident que la ligne droite IK qui joint les points d'attouchement I & K eſt le côté d'un triangle équilatéral inſcrit dans le cercle donné: & ſi dans le prolongement de la ligne OK, on prend $KL = \frac{1}{2}IK$, la ligne menée par I & L ſera parallèle à celle menée par B & K, parce que les triangles IKL, BCK ayant les angles IKL, BCK égaux, & IK:KL::2:1::BC:CK, ſont ſemblables.

Donc pour la conſtruction géométrique il faut premiérement mener les rayons OH, OI & OK qui diviſent la circonférence en trois parties égales, & prendre ſur le prolongement de OK, $KL = \frac{1}{2}IK$, mener LI & ſa parallèle KB qui coupe OI

en B; enfin prendre OA & OC égaux chacun à BO, des centres A, B & C avec une ouverture BO, décrire trois cercles qui ſatisferont à la queſtion.

PROBLEME XIV.

Deux arcs AB, ABD *dans la raiſon de* 1 *à* 3, *& leurs cordes* AB, AD *étant données, trouver le rayon du cercle.* (Figure 14).

Solution algébrique.

Soit l'arc BD diviſé en deux également en C, & que des points B & C on abaiſſe les perpendiculaires BE, CF ſur la corde AD, & AG ſur le rayon OB; ſoit auſſi $AB=a$, $AD=b$ & $AO=OB=x$, il eſt évident, à cauſe des lignes AB, BC & CD égales, que $AE=DF$ & $EF=BC=a$: donc $AE+DF=b-a$ & $AE=\frac{b-a}{2}$. Il eſt auſſi évident que les triangles ABE & AOG ſont ſemblables, parce que l'angle BAD fait ſur l'arc BD eſt égal à l'angle O au centre fait ſur $AB=\frac{1}{3}BD$. Ainſi on a $AB(a):AE\left(\frac{b-a}{2}\right)::AO(x):OG=\frac{\overline{b-a}\times x}{2a}$. Mais $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2OB\times OG$; c'eſt-à-dire $a^2=x^2+$

$x^2 - \frac{\overline{b-a}\times x^2}{a}$ ou $a^3 = 3ax^2 - bx^2$. Donc

$x = \sqrt{\frac{a^3}{3a-b}} = a\sqrt{\frac{a}{3a-b}}$.

Si le rayon AO (x) & la corde (b) d'un arc ABD ſont donnés, on déterminera aiſément la corde d'un arc ſouſtriple.

Solution géométrique.

Par la même équation la conſtruction géométrique du problême propoſé ſe trouve auſſi, en conſidérant les valeurs connues de AE, & l'égalité des angles O & EAB; ainſi ayant mené la ligne AB, qu'on prenne DH = AB, & que le reſte AH ſoit coupé en deux parties égales par la perpendiculaire EI; alors on menera AB, ſur laquelle priſe pour baſe, on conſtruira un triangle iſocéle dont l'angle au ſommet ſoit égal à l'angle EAB; les côtés AO ou BO ſeront rayons du cercle.

PROBLEME XV.

Connoiſſant deux lignes AE, CD, *menées des extrémités de la baſe d'un triangle rectangle* ABC, *au point de milieu des autres côtés, connoître le triangle.* (Fig. 15).

Je nomme AE, a; CD, b; & BD ou AD, x; alors $\overline{CB}^2 = b^2 - x^2$ & $\overline{BE}^2 =$

$\frac{1}{4}\overline{CB}^2 = \frac{b^2 - x^2}{4}$; donc $a^2 = \overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BA}^2 = \frac{b^2 - x^2}{4} + 4x^2$, ainſi $15x^2 = 4a^2 - b^2$; & $x = \sqrt{\frac{4a^2 - b}{15}}$.

Solution géométrique.

Je mene EF parallèle à CD, rencontrant AB en F, qui n'étant que moitié de CD, ſera par conſéquent connue ainſi: $\overline{AB}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EF}^2$ eſt auſſi connu. Le problême eſt donc réduit à déterminer les lignes AB & BF dans la raiſon de 4 à 1, de ſorte que la différence de leurs quarrés ſoit égale à la différence des quarrés des lignes données AE & BF. Ainſi ayant mené les lignes indéfinies BP & BQ à angle droit, qu'on prenne ſur la premiere BG=EF; & que du point G ſur QB on mene GH=AE, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EF}^2 = \overline{BH}^2$. Donc, ſi par quelque point M pris ſur PB on mene ſur BQ, MN=4MB, il eſt évident qu'une ligne HF menée par le point H parallélement à NM, coupera la ligne BF comme on demande. Ce problême devient impoſſible, lorſque l'une des deux lignes eſt plus grande que le double de l'autre.

PROBLEME XVI.

La position & la grandeur d'une ligne DE *menée parallelement à la base d un triangle rectangle* ABC, *étant donnée ; mener une autre ligne* CF *de l'angle au sommet du triangle, de façon que la partie* FG *interceptée entre la base & la ligne donnée soit égale à la partie* EG *de la ligne donnée, comprise entre un des côtés & la ligne demandée.* (Fig. 16).

Solution algébrique.

J'abaisse sur AB la perpendiculaire GH, & je fais $ED = a$, $CD = b$, $DB = c$ & $EG = x$, alors par les triangles semblables CDG & GFH, on aura $CD(b) : DG(a-x) :: GH(c) : FH = \frac{c \times a - x}{b}$. Donc $\frac{c^2 \times \overline{a-x}^2}{b^2} + c^2(\overline{HF}^2 + \overline{GH}^2) = x^2(\overline{GF}^2)$; ainsi en réduisant $b^2x^2 - c^2x^2 + 2c^2ax = c^2a^2 + c^2b^2$; & $x^2 + \frac{2ac^2}{b^2 - c^2} \times x = \frac{\overline{a+b} \times c^2}{b^2 - c^2}$, donc $x = \frac{bc\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - ac^2}{b^2 - c^2}$.

Solution géométrique.

Puisque GF est par-tout à GC dans la raison donnée de DB à DC, GE dans la position requise sera à GC dans la même

raiſon: ainſi ſi on prend ſur ED, EI=DB, & que du centre I avec le rayon CD, on décrive un arc coupant EC en K, alors la ligne CGF parallèle au rayon KI, déterminera la longueur & la poſition de GF; d'où il eſt évident que CG:EG::EK:EI::CD:DB::CG:GF, & par conſéquent GC=GF. Ce problême eſt impoſſible quand BD eſt plus grand que CE.

PROBLEME XVII.

Suppoſant l'aire d'un quarré BEDF, *formé dans un triangle rectangle* ABC, *donné égale à celle d'un triangle* ADC, *formé par deux lignes menées des extrémités de l'hypothénuſe à l'angle adjacent* D *du quarré; connoître le côté de ce quarré.* (Fig. 17).

Solution algébrique.

Je nomme BC, a; BA, b, & BE ou BF, x; alors CE étant égal à $a-x$ & AF$=b-x$ l'aire du triangle CED ſera $\frac{x\times a-x}{2}$, & celle du triangle ADF$=$ $\frac{x\times b-x}{2}$.

Mais il eſt évident que BEDF+CED+ ADF+ADC=ABC, qui à cauſe de ADC=BEDF, deviendra 2BEDF+

$CED + ADF = ABC$, c'eſt-à-dire $2x^2 + \frac{x \times a - x}{2} + \frac{x \times b - x}{2} = \frac{ab}{2}$; ainſi $x^2 + \frac{a+b}{2} \times x = \frac{ab}{2}$: & $x = \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b^2} - \frac{ab}{4}$.

Solution géométrique.

Je mene BD prolongée juſqu'à la rencontre de AC en G, & GH perpendiculaire ſur AB. Il eſt évident que le triangle ADC eſt au triangle $ABC = \frac{AB \times BC}{2}$, comme GD à BG, ou comme HF à HB; il eſt encore évident que $HB \times \overline{AB + BC} = AB \times BC$. Il s'enſuit donc que le triangle $ADC : \frac{HB \times \overline{AB + BC}}{2} :: HF : HB :: HF \times \frac{AB+BC}{2} : HB \times \frac{AB+BC}{2}$; par conſéquent le triangle $ADC = HF \times \frac{AB+BC}{2} = BF \times BK$; en prenant BK (ſur le prolongement de AB) égal à $\frac{AB+BC}{2}$.

Ainſi $\overline{BF}^2$ étant égal à $ADC = HF \times BK$, le cas que nous conſidérons eſt réduit au ſeptiéme problême, & on aura

la conſtruction géométrique ſuivante.

Ayant mené BG (coupant l'angle ABC en deux parties égales) & la perpendiculaire GH ſur AB, & ayant pris BK égale à la moitié de la ſomme de AB & de BC, comme ci-deſſus ; qu'on décrive un demi-cercle ſur HK, coupant BC en N ; & de ce point au milieu de BK, on menera MN ; alors ſi on prend MF = MN ; BF ſera le côté du quarré demandé.

PROBLEME XVIII.

Connoiſſant l'hypothénuſe AC *d'un triangle rectangle* ABC, *& la différence des lignes* AD, CD, *menées des extrémités au centre* D *du cercle inſcrit, connoître les autres côtés du triangle.* (Fig. 18).

Solution algébrique.

Sur CD prolongée, j'abaiſſe la perpendiculaire AH, & je prens $AC = a$, $AD = x$, $DC = y$, & la différence donnée $x - y = b$. Il eſt évident que l'angle $ADH = DAC + DCA = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}BCA$, ou à la moitié d'un angle droit ; donc $AH = HD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Mais $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2DH \times CD = \overline{AC}^2$, c'eſt-à-dire $y^2 + x^2 + xy\sqrt{2} = a^2$ qui deviendra (en ſubſtituant

$x-b$ pour y & c pour $\sqrt{2}$) $x^2-2bx+b^2+x^2+cx^2-cbx=a^2$; ou $2+c\times x^2-2+c\times bx+b^2=a^2$. Ainſi $x^2-bx=\frac{a^2-b^2}{2+c}$, & $x=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2+c}+\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}$.

Solution géométrique.

La conſtruction de ce problême ſera facile, connoiſſant que l'angle ADH vaut 45 degrés; car ſi on prend DE = DC, alors AE exprime la différence donnée de DC à AD, l'angle DEC (CE étant menée) ſera égal à $\frac{1}{2}$ ADH. Donc par le moyen de l'angle AEC, & des côtés AE & CE, on peut conſtruire le triangle AEC. Ainſi prolongeant AE, & prenant l'angle DEC = ECD, le point D ſera le centre du cercle, & ſon rayon ſe trouvera en abaiſſant la perpendiculaire DF ſur AC: par conſéquent le cercle pouvant être décrit, on menera des extrémités A & C les tangentes AB, BC qui formeront le triangle demandé.

PROBLEME XIX.

La baſe AB, *la perpendiculaire* CD *& le rapport des côtés* AC, BC *d'un triangle* ABC *étant donnés, connoître les côtés.* (Fig. 19).

Solution algébrique.

Je nomme A B, a; C D, b, & A D, x, & le rapport donné de A C à B C, $m : n$.

Ainſi D B $= a - x$; $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = b^2 + x^2$ & $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = b^2 + a^2 - 2ax + x^2$: donc $m^2 : n^2 :: b^2 + x^2 : b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on a $m^2 b^2 + m^2 a^2 - 2m^2 ax + m^2 x^2 = n^2 b^2 + n^2 x^2$: donc $\overline{m^2 - n^2 \times x^2} - 2m^2 ax = \overline{n^2 - m^2 \times b^2} - m^2 a^2$; & $x^2 - \frac{2m^2 a}{m^2 - n^2} \times x = -b^2 - \frac{m^2 a^2}{m^2 - n^2}$, qui étant réſolue, donne $x = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \mp \sqrt{\frac{mna^2}{m^2 - n^2} - b^2}$.

Solution géométrique.

Ce problême ſe conſtruit en diviſant la baſe A B en E, en raiſon de A C à B C, & en la prolongeant juſqu'à ce que E O ſoit quatriéme proportionnelle à A E — E B, A E & B E; car il eſt démontré que deux lignes menées des points A & B à un point quelconque d'une circonférence décrite du centre O avec l'intervalle O E, ſont en raiſon de E A à B E; ainſi il eſt évident que le point d'interſection de l'arc

& de la parallèle FG à la baſe AB à la diſtance donnée DC, ſera le ſommet du triangle.

PROBLEME XX.

Connoiſſant la baſe AB, *la perpendiculaire* CD, *& la différence de deux côtés* AC, BC *d'un triangle* ABC, *connoître les côtés* (Fig. 20).

Solution algébrique.

Prenant $AE = \frac{1}{2}AB = a$, $CD = b$, $AC - CB = d$ & $ED = x$, on a $AD = a + x$ & $BD = a - x$, $AC = \sqrt{b^2 + \overline{a+x}^2}$ & $BC = \sqrt{b^2 + \overline{a-x}^2}$; par conſéquent $\sqrt{b^2 + \overline{a+x}^2} - d = \sqrt{b^2 + \overline{a-x}^2}$, qui étant élevée au quarré, donne $b^2 + \overline{a+x}^2 - 2d\sqrt{b^2 + \overline{a+x}^2} + d^2 = b^2 + \overline{a-x}^2$, & réduiſant elle devient $4ax + d^2 = 2d\sqrt{b^2 + \overline{a+x}^2}$, qui étant auſſi quarrée & réduite, donne $16a^2x^2 + d^4 = 4d^2 \times \overline{a^2 + b^2} + 4d^2x^2$; ainſi $x = \sqrt{\frac{4d^2 \times \overline{a^2+b^2} - d^4}{16a^2 - 4d^2}}$.

Ce problême n'étant qu'un cas particulier d'un autre plus général donné ci-après (problême 49) je n'inférerai point ici la conſtruction géométrique; mais on obſer-

vera que ſi dans la ſolution algébrique on ſuppoſe *d* être la ſomme au lieu de la différence des côtés, la valeur de *x* (ou DE) ſe trouvera par la même équation; comme il eſt évident par l'opération.

PROBLEME XXI.

Connoiſſant la baſe AB, *la perpendiculaire* CD, *& le produit des autres côtés* AC, BC *d'un triangle* ABC, *connoître ces côtés.* (Fig. 21).

Solution algébrique.

En retenant les mêmes dénominations que dans le problême précédent, & prenant le produit donné égal à c^2, on a $\sqrt{b^2+a+x^2} \times \sqrt{b^2+a-x^2} = c^2$. Donc $b^2+a+x^2 \times b^2+a-x^2 = c^4$, c'eſt-à-dire $b^4+b^2\times 2a^2+2x^2+a^4-2a^2x^2+x^4 = c^4$. Ainſi $x^4+2b^2-2a^2 \times x^2 = c^4-b^4-2a^2b^2-a^4$, qui étant réſolue, donne $x = \sqrt{a^2-b^2+\sqrt{c^4-4a^2b^2}}$.

Solution géométrique.

L'aire du rectangle fait ſous les deux lignes inconnues étant donnée, on peut aſſigner deux autres lignes formant un rectangle égal, dont l'une étant connue, dé-

terminera auſſi l'autre : mais on ſçait que le rectangle fait ſous la perpendiculaire donnée CD, & le diametre du cercle circonſcrit eſt égal à celui fait ſous les côtés inconnus du triangle ; on connoît donc le diametre du cercle circonſcrit, de-là on tirera la conſtruction ſuivante :

Cherchez une troiſiéme proportionnelle à CD & au côté du quarré exprimant le rectangle donné ; & des points A & B avec la moitié de cette ligne priſe pour rayon, ayant décrit un arc coupant EF perpendiculaire ſur AB en O ; de ce point pris pour centre avec le même rayon, vous décrirez le cercle ACB ; alors menant GFG parallèle à AB à la diſtance donnée CD, les points d'interſection C ſeront les différens ſommets du triangle demandé.

PROBLEME XXII.

Connoiſſant de grandeur trois lignes AE, BF & CD *menées des angles d un triangle ſur le milieu des côtés oppoſés, connoître les côtés.* (Fig. 22).

Solution algébrique.

Soit CD=a, BF=b, AE=e, AB=x, AC=y & BC=z. Puiſque par une propriété connue des triangles $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2 = 2\overline{CD}^2 + 2\overline{AD}^2$, on a $y^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{x^2}{2}$; donc $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{2} = 2a^2$

& de la même maniere.. $\begin{cases} x^2 + z^2 - \frac{y^2}{2} = 2b^2 \\ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 2c^2. \end{cases}$

Retranchant la premiere de deux fois la somme des deux autres, on a $4x^2 + \frac{x^2}{2} = 2 \times \overline{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; & par conséquent $x = \frac{2}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, on trouvera de même $y = \frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ & $z = \frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Solution géométrique.

Si on mene CG & CH, parallèles à AE & BF, jusqu'à la rencontre de AB prolongée en H & en G, il est évident, à cause de CE = BE & CF = AF, que AG = AB = BH, que CG = 2AE & CH = 2BF. Donc les deux côtés CG, CH & la ligne CD, coupant en deux parties égales la base du triangle CGH, étant données, on connoîtra la diagonale IC (= 2CD) du parallélogramme CGHI aussi-bien que les côtés. Ainsi construisant un triangle CGI dont les côtés soient doubles des trois lignes données, menant

GDH qui coupe CI en D, & prenant DA & DB chacun égale au tiers de GD, ſi on joint les points A, C & B, C, on aura le triangle demandé. Par cette conſtruction on a la même ſolution numérique que par la voie algébrique; car $2\overline{CD}^2 + 2\overline{GD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{CH}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2$; donc $GD = \sqrt{2\overline{AE}^2 + 2\overline{BF}^2 - \overline{CD}^2}$, & par conſéquent ..... $AB = \frac{2}{3}GD = \frac{2}{3}\sqrt{2\overline{AE}^2 + 2\overline{BF}^2 - \overline{CD}^2}$.

Il eſt aiſé, par la conſtruction, de voir qu'aucune des trois ne peut être plus grande que la ſomme des deux autres.

PROBLEME XXIII.

Les côtés d'un triangle ABC *étant donnés, trouver la perpendiculaire* CD, *les ſegmens de la baſe & l'aire du triangle.* (Fig. 23).

Solution algébrique.

Soit $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$ & $AD = x$: alors $BD = b - x$ & $c^2 - \overline{b - x}^2 = \overline{CD}^2 = a^2 - x^2$; c'eſt-à-dire $c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$; ainſi $2bx = a^2 + b^2 - c^2$ & $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

Maintenant $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 =$
$\overline{AC+AD} \times \overline{AC-AD} = a + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \times$
$a - \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = \frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2b} \times$
$\frac{-a^2+2ab-b^2+c^2}{2b} = \frac{\overline{b+a}^2-c^2}{2b} \times \frac{c^2-\overline{b-a}^2}{2b}$:
ainſi $CD = \frac{1}{2b}\sqrt{\overline{b+a}^2-c^2 \times c^2-\overline{b-a}^2}$
& l'aire égale à $\frac{CD \times AB}{2} = \frac{1}{4}$
$\sqrt{\overline{b+a}^2-c^2 \times c^2-\overline{b-a}^2}$.

Solution géométrique.

Soit un cercle décrit du centre A avec un rayon AC, & qui coupe AB prolongée en E & en F, de ſorte que BF ſoit la ſomme des côtés & BE leur différence : ſoient auſſi menées les lignes EC & FC, alors $\overline{FC}^2 = FE \times FD = 2AF \times FD$; & $\overline{EC}^2 = FE \times ED = 2AE \times ED$ de plus $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FC}^2 (2AF \times FD) - 2BF \times FD = \overline{BF}^2 - 2AB \times FD$: de même $\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 (2AE \times ED) - 2EB \times ED = \overline{BE}^2 + 2AB \times ED$.

Il eſt évident que $2AB \times FD = \overline{BF}^2 - \overline{BC}^2$, & $2AB \times ED = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2$: par conſéquent $\overline{BF}^2 - \overline{BC}^2 \times \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2 = 4\overline{AB}^2 \times FD \times ED = 4\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2$; donc $\frac{AB \times DC}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\overline{BF}^2 - \overline{BC}^2 \times \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2}$ qui eſt l'aire du triangle. D'où il ſuit que l'aire d'un triangle quelconque ſe trouvera en multipliant la différence entre le quarré d'un des côtés & le quarré de la ſomme des deux autres, par celle entre le quarré du même côté, & le quarré de la différence des deux autres, & en prenant le quart de la racine quarrée du produit.

PROBLEME XXIV.

Connoiſſant les côtés d'un triangle ABC, *connoître le rayon du cercle inſcrit.* (Fig. 24).

Solution algébrique.

Du point O aux angles du triangle & aux points d'attouchement, je mene des lignes, & ſur BO prolongée j'abaiſſe la perpendiculaire AG, il eſt évident en premier lieu que OD étant égale à OE, AD ſera égale à AF, BD à BE, & CF à CE; donc ajoutant ces égalités,

on aura $BD+CF=BE+EC=BC$, je ſouſtrais chacune de ces quantités de $AB+AC$, & le reſte ſera $AD+AF=AB+AC-BC$ & AD ou $AF=\frac{AB+AC-BC}{2}$ qui étant ſouſtrait de AB & de AC donnera $BD=\frac{AB+BC-AC}{2}$ & $CF=\frac{AC+BC-AB}{2}$.

Il eſt de plus évident que les triangles AOG & COF ſont ſemblables, car la ſomme des angles au centre $DOE+DOF+FOE$ valant quatre angles droits, leurs moitiés $BOD+DOA+COF$ ou $BOD+DOA+AOG$, vaudront deux angles droits, donc $COF=AOG$.

Préſentement ſoient exprimées les valeurs déja trouvées de AD, BD & CF par a, b & c reſpectivement, & ſoit $OD=EO=OF=x$: alors on aura $BO(\sqrt{b^2+x^2}):OD(x)::AB(a+b):AG=\frac{ax+bx}{\sqrt{b^2+x^2}}$; & $BO:DB::AB:BG=\frac{ab+b^2}{\sqrt{b^2+x^2}}$: donc $OG=BG-BO=\frac{ab+b^2}{\sqrt{b^2+x^2}}-\sqrt{b^2+x^2}=\frac{ab-x^2}{\sqrt{b^2+x^2}}$; mais $AG:OG::CF:OF$; ou $ax+bx:ab-x^2::c:x$; ainſi $ax^2+bx^2=$

$abc - cx^2$: donc $x = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

Solution géométrique.

Soit DO & AG prolongées jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en H : alors les triangles semblables donneront AB : HO :: AG : OG :: CF : FO ; donc en alternant & composant, on a AB + CF : CF :: HO + FO = HD : FO = OD :: HD × OD : $\overline{OD}^2$. Mais HD × OD = AD × BD ; par conséquent AB + CF : CF :: AD × BD : $\overline{OD}^2 = \frac{AD \times BD \times CF}{AD+BD+CF}$, comme ci-dessus. De cette solution on tire facilement la régle pour trouver l'aire d'un triangle dont on connoît les côtés : car l'aire du triangle ABC est égale au rayon multiplié par la moitié de la somme des côtés, c'est-à-dire . . . . . $\sqrt{AD+BD+CF \times AD \times BD \times CF}$.

PROBLEME XXV.

Le rayon & les tangentes de deux arcs étant donnés, trouver la tangente de la somme des deux arcs. (Fig. 25).

Solution algébrique.

Soit AB & BC les arcs donnés, dont

les tangentes ſont AD & CE, & ſoit la premiere prolongée à la rencontre du rayon OC auſſi prolongé, alors AF ſera la tangente demandée. Je nomme AO, r; AD, m; CE, n; AF, x, & FO, y, & j'abaiſſe DG perpendiculaire ſur FO: j'ai par les triangles ſemblables OF (y): AO (r) :: DF ($x-m$) : DG $= \frac{rx-rm}{y}$, de même que OF (y) : AF (x) :: DF ($x-m$) : FG $\frac{x^2-mx}{y}$; par la derniere j'ai

$$OG(OF-FG) = y - \frac{x^2-mx}{y} = \frac{y^2-x^2+mx}{y} = \frac{r^2+mx}{y}$$

(parce que $y^2-x^2=r^2$)

Mais $OG\left(\frac{r^2+mx}{y}\right) : DG\left(\frac{rx-rm}{y}\right) :: OC(r) : CE(n)$, donc $r^2x - r^2m = r^2n + mnx$. Ainſi $x = \frac{r^2 \times \overline{m+n}}{r^2-mn}$, ou

$$AF = \frac{\overline{AO}^2 \times \overline{AD+CE}}{\overline{AO}^2 - AD \times CE}.$$

Autrement.

(Fig. 26). Soient AD & AE les tangentes des arcs donnés AB & AC, & BF celle de leur ſomme; ſoit auſſi abaiſſé ſur OD la perpendiculaire EG coupant le rayon OA

en H ; alors, par les triangles ſemblables, on a AO : AD :: AE : AH & HO (AO — AH) : DE :: GO : EG :: BO (AO) : FB = $\frac{AO \times DE}{AO - AH} = \frac{\overline{AO}^2 \times DE}{\overline{AO}^2 - AO \times AH} = \frac{\overline{AO}^2 \times \overline{AD + AE}}{\overline{AO}^2 - AD \times AE}$ (parce que AO × AH = AD × AE par la premiere proportion) qui eſt la même ſolution que la précédente.

Si connoiſſant les mêmes choſes, on demandoit la tangente de la différence BC des deux arcs ; alors par la proportion $\frac{r^2 + mx}{y} : \frac{rx - rm}{y} :: r : n$, on auroit $n = \frac{r^2 \times \overline{x - m}}{r^2 + mx}$ ou CE = $\frac{\overline{AO}^2 \times \overline{AF - AD}}{\overline{AO}^2 + AF \times AD}$.

PROBLEME XXVI.

Connoiſſant la raiſon des ſinus DE, FG, *& celle des tangentes* AB, AC *de deux arcs* AD, AF *d'un cercle donné, connoître les ſinus & les tangentes.* (Fig. 27).

Solution algébrique.

Soit le rayon AO = a & AB : CA :: $m : n$; ſoit de plus DE : FG :: $p : q$, je nomme AB, x, & AC, y ; alors par

les triangles ſemblables $\overline{OB}^2(a^2+x^2)$: $\overline{AB}^2(x^2) :: \overline{OD}^2(a^2) : \overline{DE}^2 = \frac{a^2x^2}{a^2+x^2}$; & $\overline{OC}^2(a^2+y^2) : \overline{AC}^2(y^2) :: \overline{OF}^2(a^2) : \overline{FG}^2 = \frac{a^2y^2}{a^2+y^2}$. Donc par la queſtion $p^2 : q^2 :: \frac{a^2x^2}{a^2+x^2} : \frac{a^2y^2}{a^2+y^2}$, & par conſéquent $p^2y^2 \times \overline{a^2+x^2} = q^2x^2 \times \overline{a^2+y^2}$. Mais par la ſuppoſition nous avons $m:n::x:y = \frac{nx}{m}$; laquelle valeur étant ſubſtituée pour y dans l'équation précédente, donnera $\frac{n^2p^2x^2}{m^2} \times \overline{a^2+x^2} = q^2x^2 \times \overline{a^2+\frac{n^2x^2}{m^2}}$; ainſi $n^2p^2 \times \overline{a^2+x^2} = q^2 \times \overline{a^2m^2+n^2x^2}$ & $x = \frac{a}{n} \times \sqrt{\frac{n^2p^2-m^2q^2}{q^2-p^2}}$ par laquelle nous connoiſſons AC, DE & FG.

Solution géométrique.

Puiſque la raiſon de AB à AC eſt donnée comme m eſt à n ; GK ſera à GF dans la même raiſon (ſuppoſant que GF coupe OB en K) & ſi on mene KH parallèle à AO coupant OF en H, OH ſera auſſi à OF dans la même raiſon donnée.

De plus ſi on mene DI parallèle à AO, rencontrant OF en I; alors OK : OH ::

OD(OF):OI::FG:DE::q:p, ainſi OK eſt trouvée, & l'on aura la conſtruction ſuivante.

Sur le rayon du cercle donné, je prens OH:OF::m:n, & ſur HF je décris une demi-circonférence: je cherche une quatriéme proportionnelle à p, q & HO avec laquelle priſe pour rayon & du centre O, je décris un arc coupant la demi-circonférence en K, enſuite je mene HK parallèle à OA.

PROBLEME XXVII.

Le côté du quarré & le rayon du cercle, inſcrits dans un triangle rectangle ABC, *étant donnés, déterminer le triangle.* (Fig. 28).

Solution algébrique.

Je mene la diagonale BD du quarré, & des points de contacts au centre O du cercle, je mene des rayons OG & OP, & du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe, j'abaiſſe la perpendiculaire BQ, je nomme le côté du quarré, a; le rayon du cercle, b, & AQ, x; alors à cauſe des parallèles, FG($a-b$):BF(a)::OD:BD::OP(b):BQ$=\frac{ab}{a-b}$; ainſi DQ$=$

$\sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BQ}^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2 b^2}{\overline{a-b}^2}}$.

Si pour abréger, on appelle DQ, c, & BQ, d, alors on aura AQ(x):BQ(d):: BQ(d):CQ$= \frac{d^2}{x}$, & AD$(c+x)$: CD$\left(\frac{d^2}{x} - c\right)$::AB:BC::AQ$(x)$: BQ$(d)$, ainſi prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, on trouvera $dx+dc=d^2-cx$; donc $x=\frac{d^2-dc}{d+c}$.

Solution géométrique.

La conſtruction géométrique auſſi-bien que la ſolution trigonométrique de ce problême, ſont fort aiſées ; car la poſition du point D par rapport au cercle étant donnée, la ligne DPA, tangente au cercle en ce point, déterminera le triangle, & par le moyen des lignes OP, OD, on trouvera l'angle D, & connoiſſant de plus l'angle ABD de 45 degrés, de même que le ſinus BD, tout le reſte ſera connu.

PROBLEME XXVIII.

Connoiſſant le rayon d'un cercle, trouver le côté du pentagone & du décagone inſcrits. (Fig. 29).

Solution algébrique.

Soient AB, BC, CD, &c. les côtés du décagone, & AC celui du pentagone; & ſoit menée la ligne AD coupant le rayon en P. Il eſt évident en premier lieu, que les angles BAD & OAP faits ſur des arcs égaux BD & BF, ſont égaux entr'eux, & à l'angle AOP embraſſant l'arc AB. Secondement, que le triangle PAB (auſſi-bien que AOP) eſt iſoſcelle, parce que la perpendiculaire A *n* C fait des angles BAC, CAD égaux avec les côtés AB, AP du triangle. Ainſi ces trois lignes AB, AP & OP ſont égales entr'elles; & AO(OB):AB(OP)::OP(AB): BP, l'angle BAO étant coupé en deux parties égales par AP. De plus, abaiſſant les perpendiculaires PQ & CM, ſur AO & ABM, les triangles BCM & APQ ſont parfaitement égaux, parce que BC = AB = AP & l'angle MBC = MAD = PAQ, de ſorte que BM étant égale à $AQ = \frac{1}{2}AO$, on a $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 + 2BM \times AB = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + AO \times AB$. Mais par la proportion ci-deſſus, $AO \times BP = \overline{AB}^2$: mettant donc $AO \times BP$ à la place de $\overline{AB}^2$, on a $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + AO \times$

$AB + AO \times BP = \overline{BC}^2 + \overline{AO}^2$, ainſi (BC étant trouvée) AC ſera auſſi connue. Si $AO = a$, & $AB = x$, alors par l'égalité de $\overline{AB}^2$ & de $OA \times BP$, on aura $x^2 = a \times \overline{a - x}$, qui donnera $x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, & $AC = \sqrt{x^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

Solution géométrique.

Puiſque le côté du décagone eſt égal à la médiane du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon, & que le quarré du côté du pentagone eſt égal au quarré du côté de l'exagone, plus au quarré du côté du décagone, la conſtruction ſuivante ſera évidente.

Soit mené le rayon OR perpendiculairement ſur le diametre AF, & ayant coupé AO en deux également en Q, ſoit pris de Q en F, $QS = QR$: alors $OF : OS :: OS : FS$, & par conſéquent $OS =$ AB côté du décagone.

Et parce que RS étant mené $\overline{RS}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OR}^2$, $RS = AC$ ſera le côté du pentagone.

PROBLEME XXIX.

Connoiſſant l'hypothénuſe AC *&* l*e*

rayon du cercle inſcrit DEFG *dans un triangle rectangle* ABC, *connoître les deux autres côtés* AB, BC. (Fig. 30).

Solution algébrique.

Du centre D aux points d'attouchement ſoient menées les lignes DE, DF & DG, qu'on tire auſſi AD & CD, & que l'on appelle DE=DF=DG, a; AC, b; BA, x, & BC, y.

Il eſt évident que CE=CG=$y-a$, car les triangles rectangles CDE, CDG ayant DE=DG & CD communs, ſont égaux. De même AE=AF=$x-a$, donc $x-a+y-a=b=$AC; laquelle devient $x+y=b+2a$. Mais par la propriété du triangle rectangle $x^2+y^2=b^2$; & ſi du double de cette équation on retranche le quarré de la premiere, le reſte ſera $x^2-2xy+y^2=b^2-4ab-4a^2$, & la racine extraite dans les deux membres, donne $x-y=\sqrt{b^2-4ab-4a^2}$: laquelle étant ſouſtraite & ajoutée à la premiere, donne $2x=2a+b+\sqrt{b^2-4ab-4a^2}$: & $2y=2a+b-\sqrt{b^2-4ab-4a^2}$.

Solution géométrique.

La différence entre chaque côté du triangle & le ſegment adjacent de l'hy-

pothénuſe étant égale au rayon, il eſt certain que la ſomme des deux côtés AB + BC excédera celle des ſegmens, c'eſt-à-dire, l'hypothénuſe entiere de deux fois le rayon, par conſéquent égale à AC+2BF. Si on fait donc BI égale à BC, AI ſera égale à AC+2BF, & l'angle BIC à un demi-droit; ce qui donne la conſtruction ſuivante.

Soit menée une ligne indéfinie ſur laquelle on prendra AH égale à l'hypothénuſe, & HI au diametre du cercle donné. Soit auſſi fait l'angle AIN de 45 degrés, & du centre A avec un rayon AH, qu'on décrive un arc coupant IN en C, alors de ce point ſur AP abaiſſant la perpendiculaire CB, on aura les côtés demandés.

PROBLEME XXX.

Le perimetre & l'aire d'un triangle rectangle ABC *étant donnés, connoître les côtés.* (Fig. 30).

Solution algébrique.

Soit le perimetre $AB+BC+AC=p$, & l'aire $\frac{1}{2}AB\times BC=a^2$: ſoit x la moitié de la ſomme des côtés AB & BC, & y celle de leur différence, alors $AB=x+y$, $BC=x-y$, & $AC=p-2x$, on aura $x+y\times$

$\overline{x-y} = 2a^2$ & $x+y^2+\overline{x-y^2} = \overline{AC}^2 = p-2x^2$; & réduiſant $x^2-y^2 = 2a^2$ & $2x^2+2y^2 = p^2-4px+4x^2$.

Ajoutant préſentement cette derniere équation au double de la premiere, on aura pour ſomme $4x^2 = -4px+4x^2+4a^2+p^2$, ainſi x eſt égal à $\frac{p^2+4a^2}{4p} = \frac{1}{4}p+\frac{a^2}{p}$, laquelle valeur miſe pour x donne $y = \sqrt{x^2-2a^2}$.

Solution géométrique.

Si du centre D du cercle inſcrit on mene des droites aux angles du triangle, il ſe trouvera diviſé en trois autres triangles ADB, BDC & ADC, dont les baſes ſeront les côtés demandés & leurs perpendiculaires des rayons du cercle; par conſéquent le triangle ABC eſt égal au rectangle fait ſous la moitié AQ de la ſomme de ſes trois côtés, & le rayon DF du cercle inſcrit: donc le rayon DF ſera connu, ſi on prend une troiſiéme proportionnelle à AQ & au coté du quarré qui exprime l'aire du triangle; alors prenant QH & QI égaux chacun à DF, AH ſera égale à l'hypothénuſe (par le problême précédent) & AI à la ſomme des deux autres

autres côtés. Ces quantités étant connues, la conſtruction eſt la même que la précédente.

PROBLEME XXXI.

La ſomme ou la différence des côtés AC, BC *d'un triangle rectangle* ABC *étant donnée, & la ſomme ou la différence de l'hypothénuſe* AB *à la perpendiculaire* CD, *abaiſſée de l'angle droit, connoître les côtés du triangle.* (Fig. 31).

Solution algébrique.

Soit $AC+BC=s$, $AC-BC=d$; $AB+CD=p$, $AB-CD=q$: alors $AC=\frac{s+d}{2}$, $BC=\frac{s-d}{2}$, $AB=\frac{p+q}{2}$, & $CD=\frac{p-q}{2}$: mais $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$; & $AB\times CD$ eſt égal au double de l'aire du triangle ABC, égal par conſéquent à $AC\times BC$, qui donnent $p^2+2pq+q^2=2s^2+2d^2$, & $p^2-q^2=s^2-d^2$, ajoutant & ſouſtrayant le double de la derniere de la premiere, on a deux autres équations

$$3p^2+2pq-q^2=4s^2$$
$$-p^2+2pq+3q^2=4d^2$$

dans leſquelles ſuppoſant données deux des

quatre quantités s, d, p, q; les deux autres ſont aiſément déterminées.

Ainſi ſoient s & p données, alors par la premiere équation on a $q^2 - 2pq = 3p^2 - 4s^2$; donc $q^2 - 2pq + p^2 = 4p^2 - 4s^2$, & $p - q = 2\sqrt{p^2 - s^2}$: par conſéquent $CD = \frac{p-q}{2} = \sqrt{p^2 - s^2}$, & $AB = p - \sqrt{p^2 - s^2}$.

Si on connoiſſoit d & q, alors on auroit $CD = \sqrt{q^2 - d^2}$; parce que $p^2 - q^2 = s^2 - d^2$ ou $p^2 - s^2 = q^2 - d^2$.

Si c'étoient s & q qui fuſſent données; on auroit $3p^2 + 2pq = 4s^2 + q^2$, qui étant réſolue, donne $p = \frac{2}{3}\sqrt{3s^2 + q^2} - \frac{1}{3}q$.

Enfin, ſi d & p étoient données, par l'équation $3q^2 + 2pq = 4d^2 + p^2$, on trouveroit $q = \frac{2}{3}\sqrt{3d^2 + p^2} - \frac{1}{3}p$.

Solution géométrique.

Les mêmes propriétés qui ont ſervi à la ſolution algébrique, nous fourniront auſſi des conſtructions géométriques du problême dans ſes différens cas; mais il ſera ſuffiſant d'examiner celui où la différence de l'hypothénuſe à la perpendiculaire & la ſomme; des autres côtés ſont données, étant le plus difficile.

Ainſi, parce que $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ &

$2AC \times BC = 2AB \times CD = 2AB \times BF$, on aura, après avoir ajouté ces deux équations enſemble, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times BC = \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \times BF = \overline{AB}^2 + 2AB \times \overline{AB - AF} = 3\overline{AB}^2 - 2AB \times AF$.

Donc ſi du centre A avec le rayon AE, on décrit un arc, & que de ſon point d'interſection H avec la ligne FH, & d'un rayon $= 2AE$, on décrit un autre arc, coupant AE prolongée en N; l'hypothénuſe AB du triangle demandé, ſera le tiers de la ligne AN déterminé de cette façon.

Car $\overline{HN}^2 = 4\overline{AE}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AH}^2 (AE)^2 - 2AN \times AF$, donc $3\overline{AE}^2 = \overline{AN}^2 - 2AN \times AF$; & ſi on prend $AB = \frac{AN}{3}$, on aura $3\overline{AE}^2 = 3AB \times 3AB - 6AB \times AF$, & par conſéquent $\overline{AE}^2 = 3\overline{AB}^2 - 2AB \times AF$.

Par cette valeur de AB on peut trouver les autres quantités; car ſi ſur FH on prend $FK = FB$, & qu'on mene KC parallèle à AN, ſon point d'interſection C avec le cercle ſera évidemment le ſommet du triangle.

LEMME.

(Fig. 32). Si du ſommet d'un triangle,

on mene une ligne à un point quelconque de la baſe, la ſomme des deux ſolides faits ſous les quarrés des deux côtés & le ſegment oppoſé, ſera égale à celui fait ſous toute la baſe & les deux ſegmens plus celui fait ſous le quarré de la ligne menée & la baſe.

Démonſtration.

Soit ACD le triangle propoſé & BD la ligne menée; je dis que $\overline{AD}^2 \times BC + \overline{CD}^2 \times AB = AC \times AB \times BC + \overline{BD}^2 \times AC$; car ſi AB & BC ſont coupées en deux également en M & en N, & que ſur AC on abaiſſe la perpendiculaire DE, il eſt connu que $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times 2ME$; $\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = BC \times 2NE$; d'où il ſuit que $\overline{AD}^2 \times BC - \overline{BD}^2 \times BC = AB \times BC \times 2ME$, & $\overline{CD}^2 \times BA - \overline{BD}^2 \times BA = AB \times BC \times 2NE$, & ſi on ajoute enſemble ces deux équations, la ſomme ſera $\overline{AD}^2 \times BC + \overline{CD}^2 \times AB - AC \times \overline{BD}^2 (= AB \times BC \times 2MN) = AB \times BC \times AC$, & par conſéquent $\overline{AD}^2 \times BC + \overline{CD}^2 \times AB = AC \times AB \times BC + AC \times \overline{BD}^2$. C. Q. F. D.

Corollaire premier. Ainſi ſi AB=BC, on aura $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{BD}^2$.

Corollaire 2. Mais ſi AD=DC, $\overline{AD}^2\times BC+\overline{CD}^2\times AB=\overline{AD}^2\times BC+\overline{AD}^2\times AB=\overline{AD}^2\times AC$. Ainſi $\overline{AD}^2\times AC=AB\times BC\times AC+\overline{BD}^2\times AC$, & par conſéquent $\overline{AD}^2=AB\times BC+\overline{BD}^2$.

Corollaire 3. Enfin ſi l'angle ADB=CDB, ou AD:CD::AB:BC, alors AD×BC étant égal à CD×AB, il s'enſuit que $\overline{AD}^2\times BC=AD\times DC\times AB$, & que $\overline{CD}^2\times AB=AD\times CD\times BC$. Ainſi $\overline{AD}^2\times BC+\overline{CD}^2\times AB=AD\times CD\times\overline{AB+BC}=AD\times AC\times CD=AB\times BC\times AC+BD^2\times AC$, & par conſéquent $AD\times CD=AB\times CB+\overline{BD}^2$.

PROBLEME XXXII.

De trois points donnés A, B, C *dans une même ligne droite, mener des lignes à un autre point* D, *de ſorte qu'elles ſoient entr'elles en raiſon donnée.* (Fig. 33).

Solution algébrique.

Soient les trois points donnés A, B

& C; je nomme AB, a; BC, b; AC, c; & AD, x: ſoient les lignes AD, BD & CD entr'elles reſpectivement comme p, q & r: alors $BD = \frac{qx}{p}$, & $CD = \frac{rx}{p}$. & par le lemme précédent $x^2 \times b + \frac{r^2 x^2}{p^2} \times a = abc + c \times \frac{q^2 x^2}{p^2}$, ainſi $\overline{bp^2 + ar^2 - cq^2} \times x^2 = abcp^2$; & par conſéquent ..... $x = p\sqrt{\frac{abc}{bp^2 + ar^2 - cq^2}}$.

Le problême pourroit ſe réſoudre en ſuivant la même voie, ſi au lieu de la raiſon des lignes, on connoiſſoit leur ſomme, leur différence ou leur produit.

Solution géométrique.

Si par un point quelconque E de la ligne BD, on mene deux lignes EF & EG qui faſſent des angles BEF, BEG reſpectivement égaux aux angles BAD, BCD; par les triangles ſemblables, on aura ..... BE : BF :: BA : BD
BE : BG :: BC : BD
& par conſéquent BF : BG :: BC : BA; donc ſi on prend BF = BC, BG ſera égale à AB.

De plus, par les triangles précédens,

on a $BD:AD::q:p::BF(BC):FE$
$BD:CD::q:r::BG(AB):GE$,

ainſi FE & GE ſeront données, & on aura la conſtruction ſuivante :

Ayant fait $BF=BC$ & $BG=AB$, qu'on prenne une quatriéme proportionnelle à q, p & BC, & une autre à q, r & AB, & avec ces deux lignes priſes pour rayons, qu'on decrive deux arcs qui ſe coupent en E : alors menant AD, & faiſant l'angle $BAD=BEF$, ſon point d'interſection avec la ligne BE, ſera le point de concours demandé.

La ſolution trigonométrique eſt auſſi facile que celle-ci, car les côtés du triangle BGE étant connus, l'angle F ſe peut connoître ; alors ayant dans le triangle BFE deux côtés, & l'angle compris de connus, le reſte ſera aiſé à trouver. On obſervera que ce problême peut être conſtruit par le moyen de deux cercles décrits de telle façon, que les lignes menées des points donnés ſe rencontrant ſur la circonférence, ſoient en raiſon donnée ; mais la méthode donnée ci-devant me paroît préférable. Lorſque les cercles décrits des centres C & F ne ſe rencontrent point, le problême eſt impoſſible ; c'eſt-à-dire, lorſque q eſt donné moindre que la dif-

férence, ou plus grand que la ſomme de $\frac{pb}{c}$ & de $\frac{ra}{c}$.

PROBLEME XXXIII.

Connoiſſant deux côtés AD, CD *d'un triangle, & une ligne* DB *menée du ſommet, diviſant la baſe* AC *en raiſon donnée, connoître la baſe.* (Fig. 34).

Solution algebrique.

Je nomme AD, a; BD, b; CD, c; & AB, x; ſoit la raiſon donnée de AB à BC, $m:n$; ainſi $BC = \frac{nx}{m}$, & $AC = x + \frac{nx}{m} = \frac{\overline{m+n}\times x}{m}$. Donc (par le lemme précédent) $a^2 \times \frac{nx}{m} + c^2 \times x = \frac{\overline{m+n}\times x}{m} \times \frac{nx}{m} \times x + \frac{\overline{m+n}\times x}{m} \times b^2$, laquelle équation étant réduite, donne $mna^2 + m^2c^2 - \overline{m\times m+n}\times b^2 = \overline{m+n}\times n x^2$, & $x = \sqrt{\frac{mna^2+m^2c^2}{\overline{m+n}\times n} - \frac{mb^2}{n}}$.

Si on ſuppoſe que BD coupe la baſe en deux également, alors m & n étant égaux, x deviendra égale à $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2} - b^2}$. Mais ſi on ſuppoſe l'angle au ſommet cou-

pé en deux également par BD, on aura $m:n::AD:CD::a:c$; ainſi mettant x & c au lieu de m & de n, ...

$$x=\sqrt{\frac{a^2c+a^2c^2}{a+c\times c}-\frac{ab^2}{c}}=\sqrt{a^2-\frac{ab^2}{c}}.$$

Solution géométrique.

Sur une ligne quelconque EG priſe à volonté, qu'on prenne EF & FG dans la raiſon donnée de AB à BC; & des points E, F & G ſoient menées trois lignes en D, de façon qu'elles ſoient entr'elles reſpectivement comme AD, BD & CD; alors ſi de D vers E on prend DA, & qu'on mene ABC parallèle à EG, on aura la baſe demandée.

PROBLEME XXXIV.

Connoiſſant deux côtés AC, BC *d'un triangle* ABC, *& les ſegmens* AE, BD *coupés par des lignes* BE, AD *égales entr'elles, & menées des angles oppoſés, connoître l'autre côté.* (Fig. 35).

Solution algébrique.

Prenant $CE=a$, $AE=b$, $CD=c$, $BD=d$, $CA=f$, $CB=g$, $AB=x$, & AD ou $BE=z$; on aura les équations ſuivantes (par le lemme précédent), $g^2\times b+x^2\times a=fab+f\times z^2$. $f^2\times d+$

$x^2 \times c = gcd + g \times z^2$; de la premiere multipliée par g, ſouſtrayez l'autre multipliée par f, le reſte ſera $bg^3 - df^3 + agx^2 - cfx^2 = abgf - cdgf$. Donc $x = \sqrt{\frac{ab - cd \times fg + df^3 - bg^3}{ag - cf}}$.

Solution géométrique.

Si on mene DF parallèle à BE, elle ſera à BE ou AD dans la raiſon donnée de CD à BC ; CF ſera auſſi à CE dans la même raiſon, & par conſéquent ſera connu. Ainſi il eſt évident que la poſition du point D par rapport au côté AC, ſera déterminée par l'interſection de deux cercles ; dont l'un ſera décrit du centre C avec un rayon CD, & l'autre de façon que les lignes menées des points A & F à un point quelconque de la circonférence, ſoient dans la raiſon donnée de CD à BC, par lequel point, ainſi déterminé, menant le côté BC du triangle, & joignant A & B, le problême ſera réſolu.

PROBLEME XXXV.

Les côtés d'un trapeze ABCD, *inſcrit dans un cercle, étant donnés, trouver le diametre de ce cercle.* (Fig. 36).

Solution algébrique.

Soit menée la diagonale AC, & ſoient abaiſſées ſur BC & AD les perpendiculaires AE & CF, alors ſoit pris $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ & $BE=x$.

Maintenant l'angle externe CDF étant égal à l'angle interne & oppoſé B, les triangles ABE & CDF ſeront ſemblables, & par conſéquent $AB(a):BE(x)::CD(c):DF=\frac{cx}{a}$. Mais $\overline{AB}^2+\overline{CB}^2-2BC\times BE=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2AD\times DF$, c'eſt-à-dire, $a^2+b^2-2bx=c^2+d^2+\frac{2cdx}{a}$, & $x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2b+\frac{2cd}{a}}$. Ainſi $AE=\sqrt{a^2-x^2}$, & $AC=\sqrt{a^2+b^2+2bx}$ ſeront auſſi connues ; c'eſt pourquoi cherchant une quatriéme proportionnelle à AE, AC & AB, on aura le diametre demandé.

Solution géométrique.

(Fig. 37). Si on mene les diagonales du trapeze, les triangles ABE & CDE, de même que CEB & AEB ſeront ſemblables. Donc AB:CD::BE:CE & BC:AD::BE:AE.

Mais puiſque les raiſons de CE & AE à BE ſont données, il s'enſuit que ſi on mene une ligne quelconque F G parallèle à AC terminée par AB & BC prolongées, & qu'on prolonge auſſi BE, les parties GH & FH ſeront à BH dans la même raiſon, c'eſt-à-dire, AB:CD::BH:GH, BC:AD::BH:FH, par conſéquent ſi on prend BH=AB, GH ſera égale à CD & $FH=\frac{AD\times AB}{CB}$, d'où l'on tire la conſtruction ſuivante:

Soit priſe FH, quatriéme proportionnelle à BC, AB & AD, & ſur le prolongement de cette ligne ſoit faite HG=CD: alors décrivant un cercle IK, tellement que les lignes menées des points F & G ſe coupant ſur ſa circonférence ſoient dans la raiſon donnée de AB à CD, & du centre H avec un rayon AB, décrivant un autre arc coupant le premier en B, on menera les lignes BF & BG, ſur leſquelles on prendra AB & BC égales aux côtés donnés, enſuite on fera paſſer un cercle par les points A, B & C, & le problême ſera réſolu.

PROBLEME XXXVI.

Connoiſſant les côtés & l'aire d'un trapeze ABCD, *déterminer le trapeze.* (Fig. 38).

Solution algébrique.

Suppoſant menée la diagonale AC, auſſi-bien que les perpendiculaires CE, CF ſur AD & AB, & faiſant $AD=a$, $DC=b$, $BC=c$, $AB=d$, l'aire donnée égale à r^2, $DE=x$ & $BF=y$.

On aura $a^2+b^2+2ax=\overline{AC}^2=c^2+d^2+2dy$, & $a\sqrt{b^2-x^2}+d\sqrt{c^2-y^2}=2ADC+2ABC=2r^2$, par la ſuppoſition.

Soit $c^2+d^2-a^2-b^2=2f$, & par la premiere équation, on aura $ax-dy=f$; de plus quarrant les deux dernieres équations, & les ajoutant, la ſomme ſera $a^2b^2+c^2d^2+2ad\sqrt{b^2-x^2}\times\sqrt{c^2-y^2}-2adxy=4r^4+f^2$; qui étant diviſée par $2ad$, & mettant g au lieu de $\frac{4r^4+f^2}{2ad}-\frac{ab^2}{2d}-\frac{c^2d}{2a}$, elle ſe réduit à $\sqrt{b^2-x^2}\times\sqrt{c^2-y^2}=g+xy$: laquelle étant quarrée, donne $b^2c^2-b^2y^2-c^2x^2=g^2+2gxy$; qui, par la ſubſtitution de $\frac{dy+f}{a}$ pour x, deviendra $b^2c^2-b^2y^2-\frac{c^2\times dy+f^2}{a^2}=g^2+2gy\times\frac{dy+f}{a}$; ainſi prenant $b^2c^2-\frac{c^2f^2}{a^2}-g^2=h$, $\frac{2c^2df}{a^2}+$

$\frac{2fg}{a} = k$, & $b^2 + \frac{cd}{a^2} + \frac{2dg}{a} = l$, on a $h = ky + ly^2$; donc $y = \sqrt{\frac{h}{l} + \frac{k^2}{4l^2}} - \frac{k}{2l}$.

Solution géométrique.

(Fig. 39). Parce que $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2AD \times DE = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BF$; donc $2AD \times DE - 2AB \times BF = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$.

Il faut donc chercher une ligne L dont le quarré ſoit égal à $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$: alors $2AD \times DE - 2AB \times BF = L^2$; & par conſéquent $DE - \frac{AB \times BF}{AD} = \frac{L^2}{2AD}$

Mais ſuppoſant PQ perpendiculaire ſur AB, & BP quatriéme proportionnelle à AD, AB & BC: on aura $\frac{BA \times BF}{AD} = BQ$, & $AB \times CF = AD \times PQ$, parce que AD:AB::BC:BP::CF:PQ; ainſi on a $DE - BQ = \frac{L^2}{2AD}$; & $AD \times EC + AB \times CF = 2r^2 = AD \times EC + AD \times PQ$, alors prenant une troiſiéme proportionnelle T à 2AD & L, & une autre V

à $\frac{1}{2}$AD & r, les réſultats ſeront DE — BQ = T & EC + PQ = V.

Le problême eſt donc réduit à trouver deux angles CDE, PBQ, dont la ſomme des ſinus CE, PQ, & la différence des coſinus DE, BQ, (répondant à des rayons donnés, mais inégaux, DC, BP,) ſoient égales à des quantités données.

Ayant mené deux lignes qui ſe coupent à angle droit, en M, & pris MP = V, ſomme des ſinus des angles, & MN = T, différence des coſinus; ſi par les centres P & N avec les rayons PB = $\frac{AB \times BC}{AD}$, & DC, on décrit deux arcs qui ſe coupent mutuellement en B, que par ce point on mene OA parallèle à MN, & qu'on joigne par des lignes droites B & P, B & N; les angles PBO & NBO = CDE ſeront les deux angles demandés, par la connoiſſance deſquels on conſtruira aiſément le trapeze.

Ce problême devient impoſſible, lorſque les deux arcs décrits des centres P, & N ne ſe rencontrent pas, c'eſt-à-dire, quand l'aire donnée eſt plus grande que celle du trapeze de mêmes côtés inſcrit dans un cercle, déterminé par le problême précédent : mais il y a une autre limite pour la moindre valeur de l'aire, (excepté

un cas particulier) & le problême ſera impoſſible quand un des deux cercles tombera entiérement dans l'autre, auſſi-bien qu'entiérement dehors : mais ce dernier cas dépend entiérement de la diſpoſition des lignes données, au lieu que la queſtion regarde proprement la premiere ou plus grande limite.

PROBLEME XXXVII.

Diviſer un angle donné BAC, *en deux parties* BAI, CAI, *de ſorte que leurs ſinus ſoient en raiſon donnée.* (Fig. 40).

Solution algébrique.

Soit la corde BC de l'angle donné BAC égale à a, la raiſon donnée $m:n$ & $BD=x$: alors parce que les triangles BDE, CDF ſont ſemblables, $BD(x)$: $CD(a-x)::BE:CF::m:n$ (par l'hypothèſe); donc $nx=ma-mx$; & par conſéquent $x=\frac{ma}{n+m}$, par le moyen de cette valeur & de ABD, qui eſt connu, on connoîtra l'angle BAD.

Solution géométrique.

La conſtruction géométrique, de même que l'opération algébrique, peut ſe trouver en diviſant la corde BC en raiſon

raiſon de $m:n$, mais la méthode ſuivante eſt préférable.

Sur AC, je prens $AG=m$, & ſur AB prolongée $AH=n$; alors menant AE parallèle à HG, l'angle ſera diviſé comme il eſt demandé, car $AG(m)$: $AH(n)$::ſin. AHG=BAE:ſin. AGH=CAE.

Par cette conſtruction, la ſolution numérique eſt facile, les côtés AG, AH, & l'angle compris étant connus.

PROBLEME XXXVIII.

Diviſer un angle BAC *en deux parties* BAG, CAG, *de façon que le rectangle de leurs ſinus (pour un rayon donné) ſoit égal à une grandeur donnée.* (Fig. 41).

Solution algébrique.

Soit l'angle donné BAC & AH perpendiculaire ſur la corde BC; ſoient auſſi $BH=CH=a$, $AH=b$, $BE\times CF=c^2$, & $HD=x$.

Par les triangles ſemblables ADH, DBE & CDF, $AD(\sqrt{b^2+x^2}):AH(b)::BD(a+x:BE.AD(\sqrt{b^2+x^2}):AH(b)::CD(a-x:CF)$. Ainſi multipliant les proportions l'une par l'autre, $b^2+x^2:b^2::$

$a+x \times a-x : BE \times CF = \frac{b^2 \times a^2-x^2}{b^2+x^2} = c^2$; donc $x = b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}}$. Par le moyen de cette valeur & des proportions précédentes, BE & CF ſeront connus.

Solution géométrique.

(Fig. 42). Si on mene CI perpendiculaire à AB, & FK à CI, les angles oppoſés CNF & ANI étant égaux, leurs complémens NCF & NAI le ſeront auſſi : donc les triangles CFK & ABE ſont ſemblables, & donnent AB : BE :: CF : FK, & AB × FK = BE × CF = c^2 ; FK ſera par conſéquent connu. Donc ſi à l'extrémité de la corde CFM, on mene MN = 2FK, perpendiculaire à CI, le point N ſera déterminé. Ainſi on aura la conſtruction ſuivante :

Soit IL troiſiéme proportionnelle à $\frac{1}{2}$AB & au côté c du quarré, exprimant la grandeur du rectangle propoſé : ſoit LM perpendiculaire à AB, rencontrant l'arc BC en M ; alors par le milieu de CM menant AG ; l'angle BAC ſera diviſé comme il eſt demandé.

La ſolution numérique eſt facile & courte : car ayant trouvé la valeur de IL (en diviſant le rectangle donné par $\frac{1}{2}$AB) ſi

elle eſt ajoutée au coſinus AI de l'angle donné, la ſomme AL ſera le coſinus de BM, différence des deux parties demandées. Ce problême devient impoſſible, quand IL eſt plus grand que IB, c'eſt-à-dire, quand le rectangle donné eſt plus grand que celui de AB par BI.

PROBLEME XXXIX.

Diviſer un angle MCN *en deux parties* MCD, NCD, *de façon que leurs tangentes ſoient en raiſon donnée.* (Fig. 43).

Solution algébrique.

Soit le rayon $CD = a$, la tangente de l'angle donné MCB égale à b, celle de la partie MCD égale à x, & la raiſon des tangentes, comme $m:n$, alors il eſt évident (par le problême 25) que la tangente BD de la partie reſtante, ſera exprimée par $\frac{a \times b - x}{a + bx}$. Ainſi on a $m:n::x:\frac{a \times b - x}{a + bx}$; donc $nx \times a^2 + bx = ma^2 \times b - x$, par conſéquent $x = a\sqrt{\frac{m}{n} + \frac{m+n \times a^2}{2nb}} - \frac{n+m \times a^2}{2nb}$.

Solution géométrique.

La raiſon de AD à BD étant donnée

comme $m:n$, la raiſon de leur ſomme AB à leur différence AE (ſuppoſant DE= DB) ſera donnée comme $m+n:m-n$; & ſi on mene NG parallèle à BA, rencontrant CE & CA en R & G, elle ſera à GR dans la raiſon de $m+n:m-n$, il eſt évident que ſi on abaiſſe les perpendiculaires NP & RQ des points N & R, elle ſera en même raiſon, d'où l'on tire la conſtruction ſuivante :

Soit NP perpendiculaire à MC, qu'on prenne PH quatriéme proportionnelle à $m+n$, $m-n$ & PN; ſoit HR parallèle à CM, rencontrant l'arc MN en R, & ſoit mené CD coupant NR en deux parties égales ; le problême ſera réſolu. Pour le calcul trigonométrique, on aura $m+n:m-n::$ NP : RQ, c'eſt-à-dire, $m+n$ eſt à $m-n$ comme le ſinus de l'angle donné eſt au ſinus de la différence des parties : les parties ſeront donc connues.

PROBLEME XL.

Diviſer un angle BAC *en deux parties* BAP, CAP, *de ſorte que le rectangle de leurs tangentes (à un rayon donné) ſoit égal à une grandeur donnée.* (Fig. 44).

Solution algébrique.

Soit le rayon AB ou AC $=a$, la tan-

gente BK de l'angle donné BAC égale à b, & celle BD de la partie DAP égale à x; alors la tangente CE de la partie reſtante ſera égale à $\frac{a^2 \times b - x}{a^2 + bx}$ (problême 25); on aura donc $\frac{a^2 \times \overline{b - x} \times x}{a^2 + bx} = BD \times CE = c^2$; ainſi $bx - x^2 = \frac{c^2 \times \overline{a^2 + bx}}{a^2} = c^2 + \frac{bc^2 x}{a^2}$, dans laquelle faiſant $d = b - \frac{bc^2}{a^2}$, elle deviendra $dx - x^2 = c^2$; donc $x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - c^2}$.

Solution géométrique.

Si on mene une ligne DF qui faſſe un angle BDF égal à l'angle CAE, les triangles BDF, CAE ſeront ſemblables, & donneront $AC \times BF = BD \times CE = c^2$: ainſi BF, & par conſéquent AF ſeront connus. De plus, la ſomme des angles BAD & BDF étant égale à l'angle donné BAC (par la ſuppoſition) & même la ſomme plus ADF égale à un angle droit, il eſt évident que ADF eſt égal à la différence entre l'angle donné BAC & un angle droit.

Donc ayant pris BF troiſiéme propor-

tionnelle à AB & au côté *c* du quarré donné, & faiſant l'angle AFO = FAC; & du centre O avec un rayon FO décrivant un cercle coupant la tangente BK en D & D: on menera AD, & le problême ſera réſolu.

Si on vouloit le réſoudre par la trigonométrie, on meneroit un diametre GH coupant l'arc AF en deux parties égales en H: alors, ayant trouvé AF, on fera AN ($\frac{1}{2}$ AF): DM (NB):: ſin. AH (coſ. NAO): ſin. GD (coſ. $\frac{1}{2}$DD) égal au coſinus de la différence des deux angles demandés BAD & DAI: ainſi leur ſomme étant auſſi donnée, les deux angles ſeront connus.

Ce problême eſt impoſſible quand le cercle AFGO ne coupe ni ne touche la ligne BK; c'eſt-à-dire, lorſque le rectangle donné eſt plus grand que le quarré de la moitié de la tangente de l'angle propoſé, l'angle étant aigu; ou que le rectangle eſt moindre que le même quarré, l'angle étant obtus.

PROBLEME XLI.

Mener une ligne DE *parallèle à une autre* AI, *de façon que par ſon interſection avec deux autres lignes* AB, AC, *données de poſition, elle forme un triangle d'une aire donnée.* (Fig. 45).

Solution algébrique.

Soit l'aire donnée égale à a^2, & les ſinus des angles DAE, ADE, AED, (à un rayon r) exprimés reſpectivement par m, n & p; alors faiſant EP perpendiculaire ſur AD, & nommant AD, x; on a, par la trigonométrie, $p:m::x:DE=\frac{mx}{p}$, & $r:n::DE:EP=\frac{mnx}{rp}$. Ainſi $\frac{mnx}{rp}\times\frac{x}{2}=a^2$; donc $x=\sqrt{\frac{2rpa^2}{mn}}=a\sqrt{\frac{2rp}{mn}}$.

Solution géométrique.

Soit AF perpendiculaire ſur AB, égal au côté du quarré exprimant l'aire donnée du triangle ADC; alors ſi on prend AB égale à 2AF, & qu'on mene FK parallèle à AB, le triangle ABK ſera égal à $\overline{AF}^2$, & par conſéquent au triangle ADE. De plus menant KM parallèle à AI, on aura $\overline{AD}^2:\overline{AM}^2::ADE(ABK):AMK::AB:AM::AB\times AM:\overline{AM}^2$; donc $\overline{AD}^2=AB\times MA$. C'eſt pourquoi AD étant moyen proportionnel entre AB & AM, ſi ſur AB on décrit un cercle ANB qui coupe MN perpendi-

culaire ſur AB en N, prenant AD égale à la corde AN, le problême ſera réſolu.

PROBLEME XLII.

Par un point donné entre deux lignes données de poſition, mener une autre ligne qui faſſe, avec les deux premieres, un triangle d'une grandeur donnée. (Fig. 46).

Solution algébrique.

Soient le point donné P, les lignes données de poſition AB & AC: ſoient auſſi PG & PF parallèles à AC & AB, PQ & ER perpendiculaires ſur AB; je fais $AG = a$, $PQ = b$, $AD = x$, & l'aire donnée égale à c^2, alors $GD(x - a) : PQ(b) :: AD(x) : ER = \frac{bx}{x-a}$. Donc $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2} = c^2$; ainſi $x^2 - \frac{2c^2x}{b} = -\frac{2ac^2}{b}$; & par conſéquent $x = \frac{c^2 \pm c\sqrt{c^2 - 2ab}}{b}$.

Solution géométrique.

Si ſur AF on conſtruit un parallélogramme AFHI égal à l'aire donnée, il eſt évident que retranchant AFPMI du parallélogramme AH & du triangle ADE, les reſtes PHM & FEP+MID ſont égaux; de ſorte que les triangles étant

ſemblables entr'eux, il s'enſuit que $\overline{PH}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{ID}^2$. Pour la conſtruction, on décrira donc du centre F avec un rayon PH, un arc qui coupera PQ perpendiculaire à AB en N; alors faiſant ID = PN, & menant DPE, on aura la poſition demandée. Car $\overline{PH}^2 (= \overline{FN}^2) = \overline{PF}^2 + \overline{DI}^2$ ($\overline{PN}^2$). On voit que ce problême deviendra impoſſible, lorſque PH ſera moindre que PF; ou que le triangle demandé ſera moindre que le double du parallélogramme AFPG.

PROBLEME XLIII.

Par un point donné P *entre deux lignes* AB, AC *données de poſition, mener une autre ligne, de ſorte que la ſomme des parties qu'elle coupera des deux premiers, ſoient égale à une quantité donnée.* (Fig. 47).

Solution algébrique.

Soit PF parallèle à AB égal à a, PG parallèle à AC égal à b, AD + AE = c, & AD = x; à cauſe des parallèles on aura DG ($x - a$) : PG(b) :: AD(x) : AE = $\frac{bx}{x-a}$. Donc $\frac{bx}{x-a} + x$ = AE + AD = c, qui étant réduite, donne $x^2 \rightarrow$

$\overline{c+a-b}\times x=-ac$, & par conſéquent $x=\frac{\overline{c+a-b}}{2}\pm\sqrt{\frac{\overline{c+a-b}^2}{4}-ac}$.

Solution géométrique.

Les triangles DPG & PFE étant ſemblables, le rectangle de DG par FE, ſera égal au rectangle connu $AF\times AG=\overline{AR}^2$, en prenant une moyenne entre $MA=AF$ & AG.

De plus, ſi on fait MN égal à la ſomme de AD & de AE, il eſt évident que la ſomme de DG & de FE, dont le produit eſt connu, ſera auſſi déterminée égale à GN.

Donc ayant décrit un demi-cercle ſur GN, & mené RS parallèle à AB, coupant la circonférence en S; ſoit par ce point abaiſſé ſur BA la perpendiculaire SD, alors par P menant la ligne DPE, elle ſatisfera aux conditions du problême.

Car $DG\times DN=\overline{DS}^2=\overline{AR}^2=AM\times AG=AF\times AG=DG\times EF$: ainſi $EF=DN$; par conſéquent $AD+AE=AD+AF+DN=MN$.

Le problême ſeroit impoſſible ſi RS ne rencontroit point le demi-cercle GN, ou ſi la ſomme de AD & AE ſurpaſſoit

celle de AG & de AF d'une quantité moindre que le double de la moyenne AR.

On peut réſoudre le problême de la même maniere, quand on connoît la différence, la raiſon ou le rectangle de AD & de AE.

PROBLEME XLIV.

Par un point donné P, *entre deux lignes* AD, AE *de poſition, mener une autre ligne, de façon que le rectangle de ſes parties coupées au point donné, ſoit égal à une grandeur donnée* (Fig. 48).

Solution algébrique.

Soient PF & PH parallèles à AC & AB; & PG perpendiculaire à AB: alors nommant PF, a; PH, b; FG, c, & BF, x, on aura $\overline{BP}^2 = a^2 + x^2 - 2cx$, & par les triangles ſemblables, BF(x): BP::PH(b): CP $= \frac{b}{x} \times$ BP, par conſéquent BP $\times$ CP $= \frac{b}{x} \times \overline{BP}^2 = \frac{b}{x} \times \overline{a^2 + x^2 - 2cx}$; ainſi la valeur de BP $\times$ CP étant d^2, on aura $\frac{d^2 x}{b} = a^2 + x^2 -$

$2cx$, qui donnera $x = \frac{d^2}{2b} + c \pm \sqrt{\frac{d^2}{2b} + c - a}$.

Solution géométrique.

Le rectangle de deux lignes inconnues étant donné, on en peut trouver une autre, laquelle avec une ligne donnée dans la figure, formera un rectangle égal.

Comme dans ce cas, la ligne AP eſt connue de grandeur & de poſition, ſoit le rectangle de cette ligne par ſon prolongement PQ égal à BP×CP; alors on aura $PQ = \frac{d^2}{AB}$; & menant la ligne QC, les triangles PQC, PBA ſeront ſemblables, parce que AP:BP::CP:PQ; de ſorte que l'angle PCQ étant égal à l'angle donné PAB, il eſt évident que le ſegment de cercle décrit ſur PQ, capable de contenir un angle égal à l'angle donné, touchera AE, ou le coupera dans des points qui ſatisferont à la queſtion.

Ce problême ſera donc impoſſible, lorſque le cercle décrit ne rencontrera pas AE; ou ayant égard à la ſolution algébrique, lorſque $\sqrt{\frac{d^2}{2b} + c - a^2}$ ſera né-

gatif, c'eſt-à-dire, quand le rectangle propoſé eſt moindre que $2b \times \overline{a - c}$ ou ſon égal $2PH \times \overline{PF - FG}$.

PROBLEME XLV.

L'aire a^2 *d'un triangle rectangle* ABC; *dont les côtés ſont en progreſſion arithmétique, étant donnée, déterminer le triangle.* (Fig. 49).

Solution algébrique.

Soit le moyen côté $AB = x$, la différence commune y, & par conſéquent $BC = x - y$ & $AC = x + y$; & ſoit l'aire donnée égale à a^2; donc $\overline{x+y}^2 = \overline{x-y}^2 + x^2$ & $\frac{1}{2}x \times \overline{x-y} = a^2$. Par la premiere de ces équations, on a $x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 - 2xy^2 + y^2$; & par conſéquent $4y = x$: ainſi ſubſtituant cette valeur pour x dans la ſeconde équation, on trouvera $2y \times 3y = a^2$; donc $y = \sqrt{\frac{a^2}{6}}$; & $x = 4y = 4\sqrt{\frac{a^2}{6}}$. Donc $BC = 3\sqrt{\frac{a^2}{6}}$, $AB = 4\sqrt{\frac{a^2}{6}}$, & $AC = 5\sqrt{\frac{a^2}{6}}$.

Solution géométrique.

On ſçait que $\overline{AC+BC}\times\overline{AC-BC}=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, & par la ſuppoſition $AC+BC=2AB$, parce que AB eſt moyen arithmétique entre AC & BC; donc $2AB\times\overline{AC-BC}=\overline{AB}^2$; par conſéquent $AC-BC=\frac{1}{2}AB$, laquelle équation étant retranchée de $AC+BC=2AB$, donnera $2BC=1\frac{1}{2}AB$; ainſi $3AB=4BC$. Mais $\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{2}{3}BC\times BC=\overline{DB}^2=a^2$; donc $\overline{BC}^2=\frac{3}{2}\overline{BD}^2$. Ainſi, ſi on prend BH à BD en raiſon de $3:2$, une moyenne proportionnelle BC entre BD & HB, ſera le plus petit côté du triangle demandé, & le plus grand étant à celui-ci en raiſon de $4:3$, ſera auſſi connu.

PROBLEME XLVI.

L'aire d'un triangle rectangle ABC, *dont les côtés ſont en proportion géométrique, étant donnée, déterminer le triangle.* (Fig. 50).

Solution algébrique.

Je fais $AC=x$, l'aire donnée égale

à a^2 ; donc $BC = \frac{2a^2}{x}$, & $AB = \sqrt{x^2 + \frac{4a^4}{x^2}}$. Donc par la ſuppoſition $\frac{2a^2}{x^2} : x :: x : \sqrt{x^2 + \frac{4a^4}{x^2}}$; ainſi $x^2 = \frac{2a^2}{x}\sqrt{x^2 + \frac{4a^4}{x^2}}$; $x^4 = \frac{4a^4}{x^2} \times \frac{x^4 + 4a^4}{x^2}$, & $x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$; par conſéquent $x^4 - 2a^4 = a^4\sqrt{20}$, & $x = a \times \sqrt[4]{2 + \sqrt{20}}$.

Solution géométrique.

Puiſque par l'hypothèſe, $AB : AC :: AC : BC$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$. Mais CD étant perpendiculaire ſur AB, donnera $\overline{AC}^2 = AB \times AD$; & $\overline{BC}^2 = AB \times BD$. Par conſéquent $\overline{AB}^2 : AB \times AD :: AB \times AD : AB \times BD$, ou $AB : AD :: AD : BD$; d'où on tire la conſtruction ſuivante :

Soit menée une ligne quelconque EG, diviſée en F en moyenne & extrême raiſon, de façon que EG ſoit à EF :: EF : FG. Soit de plus FC perpendiculaire, alors décrivant ſur EG une demi-circonférence coupant FC en C, joignant E, C & G, C ; & menant à EG la parallèle AB qui coupe un triangle $ABC = a^2$, le problême ſera conſtruit ; car il eſt évi-

dent que AB eſt diviſé en même raiſon que EG, donc AB : AD :: AD : DB.

PROBLEME XLVII.

Connoiſſant un côté AC *d'un triangle* ABC, *l'angle oppoſé, & le côté du rhombe inſcrit, connoître les autres côtés du triangle.* (Fig. 51).

Solution algébrique.

Si l'on conçoit un cercle ABCI circonſcrit au triangle, & la diagonale du rhombe prolongée juſqu'à ſa circonférence en I ; & que AI & CI ſoient menées ; leſquelles ſeront égales entr'elles, comme étant cordes des arcs AI & CI, qui ſoutiennent des angles égaux IBA, IBC, formés par la diagonale & les côtés du rhombe ; par conſéquent IAC = IBA & les triangles IAD, IAB ſont ſemblables.

Mais l'angle AIC au ſommet du triangle iſoſcèle ACI (de même que la baſe AC) eſt donné, étant égal à deux angles droits, moins ABC ; par conſéquent IA ſera auſſi donnée par la trigonométrie.

Prenant donc IA = a, BD = b, & IB = x ; par les triangles ſemblables on a $x - b$(ID) : a(IA) :: a(IA) : x(IB).

Ainſi

Ainſi $x^2 - bx = a^2$, & $x = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b$, par laquelle valeur, & celle de IA, & l'angle ABI la valeur de AB, &c. ſera auſſi connu.

Solution géométrique.

Par la proportion précédente $BI \times ID = \overline{AI}^2$; ainſi ayant, ſur le côté AC, décrit un ſegment ABC de cercle capable de contenir l'angle donné ABC, & dans l'autre ſegment AIC ayant conſtruit un triangle iſoſcèle AIC, faites IG perpendiculaire à IA, & égale à la moitié de la diagonale BD du rhombe; de plus, ſur le prolongement de GI, prenez GH = GA, & du centre I avec la diſtance IH, décrivez un arc qui coupera ABC en B, après quoi vous tirerez BA & BC les côtés demandés.

PROBLEME XLVIII.

Par deux points donnés A, B, *mener deux lignes droites qui ſe rencontrent ſur une autre droite* DE *donnée de poſition, & qui faſſent entr'elles un angle donné.* (Fig. 52).

Solution algébrique.

Soient AM & BN perpendiculaires abaiſ-

ſées des points donnés ſur la ligne donnée de poſition DE, AF parallèle à BC; alors nommant AM, a; BN, b; MN, c; & MC, x; on aura $b : c - x\,(NC) :: a : MF = \frac{ac - ax}{b}$: mais MF & MC ſont tangentes des angles MAF, MAC; leſquels pris enſemble forment l'angle FAC = ACB, à cauſe des parallèles FA & CB; donc ſi la tangente de l'angle donné avec un rayon AM, eſt égal à t, on aura, par le problême 25, $\frac{\overline{MC + MF} \times \overline{AM}^2}{\overline{AM}^2 - MC \times MF} = t$; c'eſt-à-dire, $\frac{\overline{x + \frac{ac - ax}{b}} \times a^2}{a^2 - \frac{acx - ax^2}{b}} = \overline{\frac{bx - ax + ac \times a}{ab - cx + x^2}} =$ t, qui étant réduite, donne $\frac{\overline{b - a} \times ax}{t} + \frac{a^2 c}{t} = x^2 - cx + ab$. Ainſi faiſant $c + \frac{b - a \times a}{t} = d$ & $a \times \overline{\frac{ac}{t} - b} = f$, on a $f = x^2 - dx$; & par conſéquent $x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{f + \frac{d^2}{4}}$.

Lorſque MN eſt parallèle à la ligne qui joint les points A & B; BN(b) devient égale à AM(a), & on a dans ce cas $d = c$ & $f = \frac{a^2 c}{t} - a^2$: donc $x =$

$\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 c}{t} - a^2 + \frac{c^2}{4}}$; qui peut être un théorême pour trouver les ſegmens de la baſe d'un triangle, & par conſéquent le triangle lui-même quand on connoît la baſe, la perpendiculaire & l'angle au ſommet.

Solution géométrique.

La conſtruction de ce problême général eſt très-facile; car un ſegment de cercle décrit ſur AB, & capable de contenir l'angle donné, coupera DE, ou le touchera ſimplement au point demandé, car le problême ſera impoſſible lorſque le cercle ne rencontrera pas DE, & par conſéquent l'angle ACB ſera le plus grand qu'il ſoit poſſible, quand le cercle touche ſeulement la ligne; ou quand DC eſt moyen proportionnel entre DA & DB.

PROBLEME XLIX.

Trouver un point C *dans une ligne* DE *donnée de poſition, de ſorte que la différence de deux lignes menées de deux points donnés* A, B *à ce point, ſoit une grandeur donnée.* (Fig. 53).

Solution algébrique.

Soient AR & BS perpendiculaires à DF

& ſoient ces perpendiculaires & RS qui ſont connues par la poſition de DE, déſignées par a, b & c reſpectivement; alors prenant $AC = x$, on a $RC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AR}^2} = \sqrt{x^2 - a^2}$, & $SC = \sqrt{x^2 + 2dx + d^2 - b^2} = c - \sqrt{x^2 - a^2}$, cette équation étant quarrée, donne $x^2 + 2dx + d^2 - b^2 = c^2 - 2c\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2$, laquelle étant réduite, devient $2c\sqrt{x^2 - a^2} = b^2 - a^2 - d^2 + c^2 - 2dx$, ou $\sqrt{x^2 - a^2} = m - nx$, en diviſant par $2c$, & faiſant $\frac{b^2 - a^2 - d^2 + c^2}{2c} = m$, & $\frac{d}{c} = n$.

Donc en quarrant, on aura $x^2 - a^2 = m^2 - 2mnx + n^2x^2$; ainſi $1 - n^2 \times x^2 + 2mnx = a^2 + m^2$, ou $x^2 + \frac{2mnx}{1 - n^2} = \frac{a^2 + m^2}{1 - n^2}$, & par conſéquent.....

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + m^2}{1 - n^2} + \frac{m^2 n^2}{1 - n^2} - \frac{mn}{1 - n^2}}.$$

Solution géométrique.

(Fig. 54). Si on joint les points A & B, & que AB ſoit coupée en deux parties égales en F, & qu'on mene la perpen-

diculaire CM, on ſçait par la géométrie élémentaire, que $FM = \frac{\overline{BC+AC} \times \overline{BC-AC}}{2AB}$: donc puiſque $BC - AC = PQ$, & que $BC + AC = PQ + 2AC$, il s'enſuit que $FM = \frac{\overline{PQ+2AC} \times PQ}{2AB} = \frac{\overline{PQ}^2}{2AB} + \frac{AC \times PQ}{AB}$.

Mais les valeurs de AB & de PQ étant données, celle de $\frac{\overline{PQ}^2}{2AB}$ (troiſiéme proportionnelle à 2AB & PQ) ſera auſſi donnée.

Soit donc cette valeur égale à FG, de façon que $FM = FG + \frac{AC \times PQ}{AB}$. Il eſt évident que $GM = \frac{AC \times PQ}{AB}$; c'eſt-à-dire GM:AC::PQ:AB. Elevant GH perpendiculaire ſur AB, la raiſon de GM à HC, ſera auſſi connue par la poſition de la ligne DE; ainſi la raiſon de CH à AC (côtés du triangle AHC) ſera déterminée; car faiſant GI = PQ, & élevant IK perpendiculaire à AB, on aura $\frac{HC}{HK} = \frac{GM}{GI} = \frac{GM}{PQ} = \frac{AC}{AB}$, & par conſéquent HC:AC::HK:AB.

Si on mene KL parallèle à AC ren-

contrant HA prolongée en L, on aura HC:AC::HK:KL. Donc KL=AB; ce qui donne la conſtruction ſuivante.

Après avoir fait $FG=\frac{\overline{PQ}^2}{2AB}$, GI=PQ, & élevé les perpendiculaires GH & IK, on menera HA, du centre K avec un rayon AB, on décrira un arc coupant HA prolongée en L; alors menant LK & ſa parallèle AC, celle-ci coupera DE au point demandé.

De cette conſtruction, on peut tirer la façon ſuivante de réſoudre le problême par la trigonométrie.

Soit $FG=\frac{\overline{PQ}^2}{2AB}$ ſouſtrait de FD & de FA, les reſtes GD & GA ſeront connus, & alors GD:GA::tang. DHG (ou cot. D):tang. AHG; donc on connoîtra LHK; & puiſque ſin. DHG (ou cof. D):ray.::IG(PQ):HK la valeur de HK, de même que celle de KL & l'angle HKL ſeront connus, par ce moyen deux angles du triangle étant trouvés, l'angle DAC=ECA—D=HKL—D, ſera facile à connoître. Il eſt évident que la différence donnée ne peut ſurpaſſer la diſtance BA: mais lorſque la ligne DE paſſe entre A & B, les limi-

tes ſeront moindres ; il ſera aiſé dans chaque cas de les déterminer par la poſition de la ligne DE. Il eſt à remarquer que la ſolution ci-deſſus ne ſatisfait point au cas ou DE eſt perpendiculaire ſur AB, celui où la ſolution générale eſt la plus ſimple ; mais ici l'opération devient plus facile & plus expéditive ; car la poſition de MC (avec qui DE eſt ſuppoſé ſe confondre) eſt actuellement connue: de même que $AC = \frac{GM \times AB}{PQ}$, & ſi du point A pris pour centre avec le rayon AC, on décrit un arc, il coupera MC ou DC au point demandé.

PROBLEME L.

De deux points donnés AC *ſur le diametre* EF *d'un cercle, mener deux lignes qui ſe rencontrent ſur la circonférence, de façon que leur différence ſoit une grandeur donnée, qui ne peut être plus grande que la diſtance des deux points.* (Fig. 55).

Solution algébrique.

Soit EF le diametre, & les deux points donnés A & C. Soit auſſi $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, le ray. $BD = r$, $AD = x$, & $CD = x + d$; d étant la différence donnée. Alors, par le premier lemme,

on a $x^2 \times b + x + d^2 \times a = abc + cr^2$;
ou $bx^2 + ax^2 + 2adx + ad^2 = abc + cr^2$.
Ainſi $x^2 + \frac{2adx}{c} = ab + r^2 - \frac{ad^2}{c}$, &
par conſéquent.....

$$x = \sqrt{ab + r^2 - \frac{abd^2}{c^2}} - \frac{ad}{c}.$$

Solution géométrique.

La conſtruction géométrique ſe déduit du même lemme, par lequel il eſt évident que $\overline{AD}^2 \times \frac{BC}{AB} + \overline{CD}^2 = \overline{AC \times BC} + \frac{\overline{AC \times BD}^2}{AB} = AC \times BC + AC \times BG =$
$AC \times \overline{BC + BG} = AC \times GC$ en faiſant $BG = \frac{\overline{BD}^2}{AB}$.

Donc ayant pris BG, troiſiéme proportionnelle à AB & à BD, & CL moyenne entre AC & CG: menez BK perpendiculaire à GF, rencontrant en K la circonférence du demi-cercle décrit ſur AC, & ayant mené AKM, & pris AH égal à la différence donnée; du centre H avec le rayon LC, ſoit décrit un arc coupant AK en M; de ce point abaiſſant ſur GM la perpendiculaire MN, & du centre A avec AN pour rayon, décrivant

un arc qui coupera la circonférence donnée au point D, le problême ſera réſolu. Car $AB:BC::\overline{AB}^2 : AB\times BC = \overline{BK}^2 :: \overline{AN}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{NM}^2 = \overline{AD}^2 \times \frac{BC}{AB}$, & $\overline{NM}^2 (\overline{AD}^2 \times \frac{BC}{AB}) + \overline{HN}^2 = AC\times CG = \overline{AD}^2 \times \frac{CB}{AB} + \overline{CD}^2$; donc $CD = HN = AN + AH = AD + AH$, & par conſéquent $CD - AD = AH$, différence donnée par la conſtruction.

La méthode du calcul eſt aiſée par cette conſtruction; car ayant calculé $BG = (\frac{\overline{BD}^2}{AB}) HM = (\sqrt{CA\times\overline{CB}\times BG})$ & l'angle BAK (par la ſuppoſition AB: BC:: $\overline{\text{ray.}}^2 : \overline{\text{tang. BAK}}^2$), alors connoiſſant dans le triangle HAM deux côtés & un angle, le reſte eſt connu.

PROBLEME LI.

Du milieu F *& des extrémités* A, B *d'une droite donnée, mener trois lignes à un point ſur une autre droite* DE *donnée de poſition, de façon qu'elles ſoient en proportion continue.* (Fig. 56).

Solution.

Puiſque $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{FC}^2 + 2\overline{BF}^2$, & $BC \times AC = FC^2$; il eſt évident que $\overline{BC}^2 - 2BC \times AC + \overline{AC}^2 = 2\overline{BF}^2$, ou $\overline{BC - AC}^2 = 2\overline{BF}^2 = \overline{BG}^2$, en prenant BG égale à la diagonale du quarré de BF.

Ainſi $BC - AC = BG$ étant donné, ce problême ſe réduit au quarante-neuviéme, auquel je renverrai pour le reſte de la ſolution. Il eſt évident qu'on pourroit déterminer de même un point ſur la circonférence d'un cercle donné, dont le centre ſeroit ſur une droite AB, de ſorte que les lignes menées de ce point aux points donnés, ſeroient en proportion continue.

PROBLEME LII.

De deux points donnés A, B *dans un cercle donné, mener deux lignes qui ſe rencontrent ſur ſa circonférence, de façon que la ſomme de leurs quarrés ſoit une quantité donnée.* (Fig. 57).

Solution algébrique.

Soit menée par les points donnés la ligne EF, rencontrant la circonférence du cer-

cle en E & F, à laquelle on menera le diametre PQ parallélement, & ſoit menée la corde GC coupant perpendiculairement le diametre & la droite EF en D & H.

Alors faiſant $EF = a$, $EA = b$, $EB = c$, $DH = d$, $ED = x$, $DC = y$, & la quantité donnée $\overline{AC}^2 + \overline{BC} = e^2$, on aura $DF = a - x$, $DA = b - x$, $DB = c - x$, & $DG = y + 2d$.

Mais $ED \times DF = CD \times DG$, & $\overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, c'eſt-à-dire, $\begin{cases} x \times a - x = y \times y + 2d \\ b + x^2 + y^2 + c^2 + c - x^2 + y^2 = e^2, \end{cases}$ ou $ax + x^2 = y^2 + 2dy$, & $2x^2 + 2y^2 - 2bx + 2cx = e^2 - b^2 - c^2$. Ainſi ajoutant à la derniere le double de la premiere, on a $2ax - 2bx - 2cx = e^2 - b^2 - c^2 + 4dy$, & par conſéquent $y = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{4d} + \frac{a - b - c}{2d} \times x = f + gx$ (faiſant $\frac{b^2 + c^2 - e^2}{4d} = f$, & $\frac{a - b - c}{ad} = g$) préſentement de cette valeur de y ſubſtituée dans la premiere équation, viendra $ax - x^2 = f^2 + 2fgx + g^2x^2 + 2df + 2dgx$, ou $1 + g^2 \times x^2 + 2dg + 2gf - a \times x = -f^2 - 2df$, dans laquelle ſubſtituant m &

n pour $1+g^2$, $a-2dg-2gf$, & p pour $f\times f+2d$, la valeur de x ſera $\frac{n}{2m}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}-\frac{p}{m}}$.

Solution géométrique.

(Fig. 58). Le ſommet d'un triangle dont la baſe & la ſomme des quarrés des deux côtés ſont donnés, eſt ſur la circonférence d'un cercle qui a pour centre celui de la baſe, parce que la ligne menée au ſommet du milieu de la baſe, eſt une quantité invariable.

Soit donc AB coupée en deux également par la perpendiculaire IMN, & MR & MN égaux chacun à la moitié du côté e du quarré donné, alors menant NR, & du point A à MI, menant AK = NR; ſi du centre M avec le rayon MK, on décrit un arc, il rencontrera le cercle donné au point demandé; car AC, BC & MC étant menées, on aura $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{CM}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{MK}^2=2\overline{AK}^2=2\overline{RN}^2=4\overline{RM}^2=e^2$. La ſolution demande que $MC=\sqrt{\frac{e^2}{2}-\overline{AM}^2}$ ſoit plus grand que la différence, & moindre que la ſomme du rayon du cercle donné,

& de la distance du point M au centre.

PROBLEME LIII.

Mener une droite par un point donné, de sorte que le rectangle des perpendiculaires menées des deux autres points donnés sur cette ligne, soit une grandeur donnée. (Fig. 59).

Solution algébrique.

Soit le premier point donné A, les deux autres B & C; qu'on prolonge BA & CQ jusqu'en E, & qu'on éléve sur BE la perpendiculaire CF, laquelle & le segment AF sont donnés par la position des points donnés.

Supposant donc $CF = a$, $AF = b$, $AB = c$, $EF = x$, on aura $CE = \sqrt{a^2 + x^2}$; alors par les triangles semblables CE: EF :: AB : BP $= \frac{cx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, & CE: EF :: AE: EQ $= \frac{x \times b + x}{\sqrt{a^2+x^2}}$: ainsi CQ $=$ CE $-$ EQ $= \sqrt{a^2+x^2} - \frac{bx+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2 - bx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; & par conséquent BP $\times$ CQ $= \frac{cx \times a^2 - bx}{a^2+x^2} = g^2$, en supposant g^2 égal

au rectangle proposé. Par cette équation, faisant $d = \frac{a^2 c}{bc+g^2}$, & $f = \frac{a^2 g}{bc+g^2}$, la valeur de x sera $\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{1}{4}d^2 - fg}$.

Solution géométrique.

Si on mene QM parallèle à AB, le triangle CQM sera semblable au triangle ABP, & par conséquent $AB \times QM = BP \times CQ = g^2$. Ainsi QM est connue, ce qui donne la construction suivante:

Soit FD, prolongement de BF, égale au double de la troisiéme proportionnelle à AB, & au côté g du quarré donné; soit DG parallèle à FC, coupant en G la demi-circonférence, décrite du centre A avec le rayon AC, alors menant CG & la perpendiculaire PQ, le problême sera résolu.

Pour le calcul trigonométrique, on aura AF : AD (AF + FD) :: cos. HGC : cos. HG, différence entre les angles BAP (HAQ) & CAQ, desquels connoissant aussi la somme, ils seront connus eux-mêmes.

Ce problême sera impossible, lorsque FD sera plus grand que FH, c'est-à-dire, lorsque le rectangle proposé sera plus grand que celui de AB par FH.

PROBLEME LIV.

Deux lignes, menées d'un point donné, étant données de grandeur & de position, en mener une autre par le même point, de façon que les deux perpendiculaires abaiſſées des extrémités des deux premieres, forment des triangles égaux. (Fig. 60).

Solution algébrique.

Soit le point donné A, les deux lignes données AB & AC; ſoient BA & CQ prolongées en E: & ſur BE abaiſſée la perpendiculaire CF; alors faiſant $CF=a$, $AF=b$, $AB=c$, & $EF=x$, les aires des triangles ſemblables ſont en raiſon des quarrés des côtés homologues; ainſi les triangles AEQ, ABP étant ſemblables au triangle CEF, on a $\overline{CE}^2 (a^2+x^2) : \frac{1}{2} CF \times EF (\frac{1}{2} a x) :: \overline{AB}^2 (c^2) : ABP \left(\frac{\frac{1}{2} a c^2 x}{a^2+x^2}\right)$; & $a^2+x^2 : \frac{ax}{2} :: \overline{x+b^2} = \overline{AE}^2 : AEQ = \frac{\frac{1}{2} a x \times \overline{x+b^2}}{a^2+x^2}$; l'aire du triangle AEC étant $\frac{a}{2} \times \overline{x+b}$; celle de ACQ ſera $\frac{\frac{a}{2} \times \overline{x+b} \times \overline{a^2-bx}}{a^2+x^2}$, qui étant égal à

ABP, par la ſuppoſition, on a $\overline{x+bx} \times \overline{a^2-bx} = c^2x$. Ainſi prenant $d = \frac{c^2-a^2}{b} + b$, on aura $x = \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}$.

Solution géométrique.

(Fig. 61). Ayant abaiſſé A*b* perpendiculaire ſur AB, & qui lui ſoit égale, & *bp* ſur PQ les triangles A*bp*, ABP ſeront ſemblables & égaux entr'eux, & par conſéquent égaux à ACQ, en retranchant ſucceſſivement ces triangles égaux du trapeze A*b*CQ, les reſtes *pb*CQ & AC*b* ſont égaux.

Ainſi il eſt évident que le parallélogramme ſous C*b* & DE, dont l'angle eſt CDE, (ſuppoſant DE parallèle & moyenne arithmétique entre CQ & *bp*) eſt égal au triangle ACB, & par conſéquent ſa hauteur n'eſt que la moitié de celle du triangle: ainſi le point E ſera ſur la circonférence d'un demi-cercle décrit ſur le diametre AD, dont FE étant un rayon, eſt égale à AF; & par conſéquent DG = AD (en ſuppoſant DC prolongée à la rencontre de AQ en G).

Donc, pour conſtruire le problême, après avoir abaiſſé la perpendiculaire A*b* égale

égale à AB, & mené AD au milieu de CB, ſi on prolonge DC juſqu'à ce que DG = DA, le problême ſera réſolu.

Il arrive ſouvent que la démonſtration d'une conſtruction géométrique, pour être plus nette & élégante, ſe ſert de principes bien différens de ceux qui ont ſervi à ſa conſtruction, comme dans ce cas-ci, car par les triangles ſemblables il eſt évident que $GQ(Ap) : QC :: Gp(AQ) : bp$: donc $\frac{1}{2}AQ \times QC = \frac{1}{2}Ap \times pb = \frac{1}{2}PB \times AP$.

Nota. Si AB & AC étoient des demi-diametres conjugués d'une ellipſe, la ligne PAQ, déterminée comme ci-deſſus, ſeroit la poſition du grand axe : & ſi ſur C*b* on décrivoit un demi-cercle coupant AD en H & en K, AH & AK ſeroient égales à la moitié des deux axes.

On peut encore de-là déduire aiſément pluſieurs propriétés utiles des diametres conjugués d'une ellipſe, telles que la ſomme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques eſt égale à la ſomme des quarrés des deux axes ; & qu'un parallélogramme décrit autour des diametres conjugués, eſt égal au rectangle des deux axes, & pluſieurs autres ; mais ces matieres ne ſont pas propres à être placées en ce lieu.

Quoi qu'il en ſoit, il n'eſt pas hors de

propos d'obſerver que le dernier problême eſt toujours poſſible, excepté les deux cas où les lignes données ſont perpendiculaires, & en lignes droites.

PROBLEME LV.

Si aux extrémités M, *m*, *de deux droites données* AM, A*m*, *faiſant un angle auſſi donné, on éleve deux perpendiculaires qui ſe coupent, on demande de trouver la diſtance du point d'interſection au ſommet de l'angle donné.* (Fig. 62).

Solution algébrique.

Puiſque les angles à AMC & A*m*C ſont droits, la circonférence du cercle qui aura pour diametre AC, paſſera par les points M & *m*; donc ſi on mene M*m* & la perpendiculaire *m*E ſur AM, les triangles A*m*C & ME*m* ſeront ſemblables à cauſe des angles égaux AC*m* & EM*m*, faits ſur le même arc A*m*, & des angles droits A*m*C & *m*EM.

Si préſentement $m\mathrm{E} : \mathrm{A}m :: s : r$ & $\mathrm{AE} : \mathrm{A}m :: c : r$, on aura $\mathrm{AE} = \frac{c}{r} \times m\mathrm{A}$; donc $\overline{\mathrm{M}m}^2 = \overline{\mathrm{A}m}^2 + \overline{\mathrm{AM}}^2 - 2\,\mathrm{AM} \times \mathrm{AE} = \overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{A}m}^2 - \frac{2c}{r} \times \mathrm{MA} \times m\mathrm{A}$; ainſi à cauſe des triangles nommés, on aura

$\overline{mE}^2 : \overline{Am}^2 :: s^2 : r^2 :: \overline{Mm}^2 : \overline{AC}^2 = \frac{r^2}{s^2} \times \overline{AM}^2 + \overline{Am}^2 - \frac{2rc}{s^2} \times AM \times Am.$ Ainſi AC eſt déterminée.

Comme la conſtruction de ce problême eſt aſſez indiquée par les conditions, on ne la donnera pas.

PROBLEME LVI.

Trouver un point C *par lequel les trois lignes menées à trois autres points, ſoient en raiſon de trois quantités données.* (Fig. 63).

Solution algébrique.

Soient les raiſons données des lignes a, b, e. Soient joints les points donnés A, B, E: alors faiſant $AB = f$, $AE = g$, & $AC = x$, on aura $BC = \frac{bx}{a}$, & $EC = \frac{ex}{a}$ par la ſuppoſition, mais $AM = \frac{1}{2}AB + \frac{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AB} = \frac{f}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2a^2 f} \times x^2$. Suppoſant Cm & CM perpendiculaires ſur AE & AB reſpectivement; $Am = \frac{1}{2}AE + \frac{\overline{AC}^2 - \overline{EC}^2}{2AE} = \frac{g}{2} + \frac{\overline{a^2 - e^2} \times x^2}{2a^2 g}$.

Ainſi prenant $\frac{a^2 f}{a^2 - b^2} = h$, $\frac{a^2 g}{a^2 - e^2} = k$, & $z = \frac{f}{2} + \frac{\overline{a^2 - b^2} \times x^2}{2 a^2 f} = AM = \frac{f}{2} + \frac{x^2}{2h}$: on a $x^2 = 2hz - fh$; donc $Am = \frac{g}{2} + \frac{x^2}{2k} = \frac{g}{2} + \frac{2hz - fh}{2k} = l + \frac{hz}{k}$, faiſant $l = \frac{g}{2} - \frac{fh}{2k}$.

Maintenant puiſque (par le dernier problême) $\overline{AM}^2 + \overline{Am}^2 - \frac{2c}{r} \times AM \times Am = \frac{s^2}{r^2} \times \overline{AC}^2$ (s & c étant le ſinus & coſinus de l'angle donné MAm & r le rayon) on aura l'équation ſuivante, en ſubſtituant les valeurs trouvées de AM, Am & AC,

$$z^2 + \overline{l + \frac{hz}{k}}^2 - \frac{2cz}{r} \times \overline{l + \frac{hz}{k}} = \frac{s^2}{r^2} \times \overline{2hz - fh},$$

laquelle étant réſolue, donnera la valeur de z, & par conſéquent la poſition du point D.

Solution géométrique.

(Fig. 64). Si ſur AB on prend $AF = a$, & qu'on mene FH faiſant un angle AFH égal à l'angle ACB, & rencontrant AC en H, il eſt évident, par les triangles AFH, ACB, que $FH = b$. De plus,

ſi on mene auſſi HG, faiſant l'angle AHG=AEC, les lignes HG & AG ſeront connues; car puiſque GA:AH:: AC:AE, & AF:AH::CA:AB, il s'enſuit que AG:AF::AB:AE; ainſi AG eſt donné, & on aura $a:e$::AC:EC:: AG:HG; ce qui fera connoître HG.

Conſtruction.

Prenez AF=a, l'angle AFG=AEB, AI=e, & IK parallèle à FG; décrivez auſſi des centres F & G avec des rayons b & AK des arcs, & par le point d'interſection H, menez HF & HA, alors menant BC qui faſſe avec AC un angle ABC=AHF, AH ſera coupé au point demandé.

Comme la ſolution trigonométrique eſt évidente par la conſtruction, elle n'a pas beſoin d'explication. Il ſera à propos cependant d'obſerver que ce problême eſt impoſſible, lorſque les deux arcs ne ſe coupent ni ne ſe touchent; c'eſt-à-dire, lorſque FG eſt plus grand que la ſomme de AK & de b, ou moindre que leur différence.

PROBLEME LVII.

Trois points étant donnés, on demande d'en déterminer un quatriéme, de ſorte

que les lignes menées de celui-ci aux trois premiers, ayent des différences données. (Fig. 63).

Solution algébrique.

Suppoſant que les points donnés A, B, E ſoient joints par des lignes droites, & nommant AB, a; AE, b; AC, x; BC, $x+p$, & EC, $x+q$, (p & q étant les différences données). Si ſur AB & AE on abaiſſe les perpendiculaires CM & Cm, on aura, par les triangles ſemblables, AB(a):BC+AC($2x+p$)::BC—AC(p):BM — AM = $\frac{2px+p^2}{a}$: ainſi AM = $\frac{1}{2}a - \frac{2px+p^2}{2a}$; & par un raiſonnement ſemblable Am = $\frac{1}{2}b - \frac{2qx+q^2}{2b}$, dans leſquelles prenant $f = \frac{1}{2}a - \frac{p^2}{2a}$, & $g = \frac{1}{2}b - \frac{q^2}{2b}$, pour abréger, elles deviendront $f - \frac{px}{a}$ & $g - \frac{qx}{b}$.

De plus, ſoient le ſinus, le coſinus & le rayon de l'angle mAM, égaux à s, c & r reſpectivement; il eſt évident (par le problême 55) que $\overline{\text{AM}}^2 + \overline{\text{A}m}^2 - \frac{2c}{r} \times$

$AM \times Am = \frac{s^2}{r^2} \times \overline{AC}^2$, ou $\overline{f - \frac{px}{a}}^2 + \overline{g - \frac{qx}{b}}^2 - \frac{2c}{r} \times \overline{f - \frac{px}{a}} \times \overline{g - \frac{qx}{b}} = \frac{s^2 x^2}{r^2}$, qui étant réduite, donne .....

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2cpq}{rab} - \frac{s^2}{r^2} \times x^2 - \frac{fp}{a} + \frac{gq}{b} - \frac{cgp}{ra} - \frac{cfq}{rb} \times 2x = -f^2 - g^2 - \frac{2cfg}{r}.$$

Ainſi faiſant les ſubſtitutions néceſſaires dans les coëfficiens de x, &c. on connoîtra la valeur de x, & par ſon moyen la poſition du point C.

Solution géométrique.

(Fig. 65). Si on coupe AB en deux parties égales en F, & qu'on prenne FG égale à la troiſiéme proportionnelle à 2AB & $PQ = BC - AC$; on aura $GM = \frac{AC \times PQ}{AB}$ (par le problême 49) coupant de même AE en f, & faiſant fg égale à la troiſiéme proportionnelle à 2AE & $RS = EC - AC$, on aura auſſi $gm = \frac{AC \times RS}{AE}$; ainſi il eſt évident que GM & gm ſont en raiſon de $\frac{PQ}{AB}$ & $\frac{RS}{AE}$, ou de

PQ à $\frac{AB \times RS}{AE}$; ou enfin de IG à ig, en prenant GI = PQ & $gi = \frac{AB \times RS}{AE}$.

Donc ſi on mene GH & gH, de même que IK & iK ſe coupant en H & en K, le point C tombera néceſſairement ſur la ligne de qui paſſe par H & K, puiſqu'alors ſeulement on aura GM:GI:: HC:HK::gm:gi, ou en alternant GM:gm::GI:gi.

Raiſonnant de même, par les triangles ſemblables ACB, BEC, on trouvera la poſition d'une autre ligne dans laquelle tombera le point C, & dont le point d'interſection avec de, ſera le point demandé.

Mais comme ce cas, par la poſition de de ainſi donnée, eſt préſentement réduit au problême 49, le reſte de la ſolution ſera donnée par une méthode différente, ſelon laquelle, & ce qui a été démontré ci-deſſus, je fais la conſtruction ſuivante.

Conſtruction.

Prenez fg troiſiéme proportionnelle à 2AE & RS, & gi quatriéme proportionnelle à AE, AB & RS; faites FG troiſiéme proportionnelle à 2AB & PQ, & GI = PQ; menez la ligne de par les points d'interſections des perpendiculaires GH,

gH; IK & iK; décrivez du centre K avec le rayon AB un arc de cercle, & par A menez HL le rencontrant en L, alors menant AC parallèle à la ligne LK, le problême ſera réſolu. Par ce moyen, la ſolution trigonométrique eſt auſſi trouvée.

De cette conſtruction, on tire la ſolution du problême pour décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

LEMME.

Si du ſommet d'un triangle on mene une ligne droite qui diviſe la baſe en raiſon de deux nombres donnés, je dis que la ſomme des multiples des quarrés des deux côtés, dont les facteurs ſont les nombres donnés, pris alternativement, ſera égale à la ſomme du rectangle des deux parties de la baſe & du quarré de la ligne qui diviſe la baſe priſe autant de fois qu'il y a d'unités dans la ſomme des deux nombres donnés.

Démonſtration.

Car ſoient AD & BD chacun coupés en deux également en M & N, & ſur AB la perpendiculaire CE, alors $\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 = AD \times 2ME$. Ainſi il eſt évident

que $m \times \overline{AC}^2 - m \times \overline{DC}^2 = m \times AD \times 2ME$, ($m$ étant un des nombres donnés, & n l'autre) on trouvera de même $n \times \overline{BC}^2 - n \times \overline{DC}^2 = n \times BD \times 2NE$; donc ajoutant ces deux équations $m \times \overline{AC}^2 + n \times \overline{BC}^2 - \overline{m+n} \times \overline{DC}^2 = m \times AD \times 2ME + n \times BD \times 2NE$: mais $m:n::BD:AD::BD \times 2NE:AD \times 2NE$; donc $n \times BD \times 2NE = m \times AD \times 2NE$, mettant ces quantités égales en la place des premieres, on aura $m \times \overline{AC}^2 + n \times \overline{BC}^2 - \overline{m+n} \times \overline{DC}^2 = m \times AD \times 2ME + m \times AD \times 2NE = m \times \overline{AD \times 2ME + AD \times 2NE} = m \times AD \times \overline{AB} = \overline{m+n} \times AD \times DB$, parce que $m : m+n::BD:AB$; & par conſéquent $m \times \overline{AC}^2 + n \times \overline{BC}^2 = \overline{m+n} \times \overline{DC}^2 + \overline{m+n} \times AD \times BD$. *Ce qu'il faut démontrer.*

Il eſt évident que ſi au lieu des nombres m & n, on ſuppoſoit des lignes données, on auroit la ſomme des ſolides $m \times \overline{AC}^2$ & $n \times \overline{BC}^2$, égale à la ſomme des ſolides $\overline{m+n} \times \overline{DC}^2$ & $\overline{m+n} \times AD \times BD$.

PROBLEME LVIII.

De pluſieurs points donnés, mener des

lignes qui ſe rencontrent ſur une ligne donnée de poſition, de ſorte que la ſomme de leurs quarrés ſoit une quantité donnée. (Fig. 66).

Solution algébrique.

Soient abaiſſés des points donnés A, B, C, D, &c. ſur la ligne MN donnée de poſition, les perpendiculaires QA, BR, CS, &c. prenant donc $AQ=a$, $BR=b$, $CS=c$, $DT=d$, $EV=e$, $QR=r$, $QS=s$, $QT=t$, $QP=x$, & la quantité donnée égale à k^2, alors RP étant égal à $x-r$, & SP à $x-s$, &c. on aura

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AP}^2 = a^2+x^2 \\ BP = b^2+x^2-2rx+r^2 \\ CP = c^2+x^2-2sx+s^2 \\ DP = d^2+x^2-2tx+t^2 \\ \&c.\end{array}\right\} = k^2.$$

Prenant $a^2+b^2+c^2+d^2+$ &c. $=f^2$, $r+s+t+$ &c. $=g$, & $r^2+s^2+t^2+$ &c. $=m^2$, & le nombre des points donnés n, l'équation réduite donnera $f^2+nx^2-2gx+m^2=k^2$; donc $x=\frac{g}{n}\pm\sqrt{\frac{k^2-f^2-m^2}{n}+\frac{g^2}{n^2}}$.

Solution géométrique.

(Fig. 67). Si on mene PQ coupant la diſtance AB en deux également, on aura $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2AQ \times BQ + 2\overline{QP}^2$ par le lemme précédent. Et ſi menant QC, on prend QR égale à ſon tiers, on aura par le lemme $2\overline{QP}^2 + \overline{CP}^2 = 3QR \times CR + 3\overline{RP}^2$; ainſi ajoutant ces deux équations, & retranchant $2\overline{QP}^2$ de part & d'autre, on trouvera que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 2AQ \times BQ + 3QR \times CR + 3\overline{RP}^2$.

Menant encore RD, & faiſant RS égal à ſon quart, on a $3\overline{RP}^2 + \overline{DP}^2 = 4RS \times DS + 4\overline{SP}^2$; donc ajoutant la derniere équation & celle-ci $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 = 2AB \times BQ + 3QR \times CR + 4RS \times DS + 4\overline{SP}^2$.

De même SE étant menée, & ST ſa cinquiéme partie, $4\overline{SP}^2 + \overline{EP}^2 = 5ST \times ET + 5\overline{TP}^2$, & par conſéquent $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 + \overline{EP}^2 = 2AQ \times BQ + 3QR \times CR + 4RS \times DS + 5ST \times ET + 5\overline{TP}^2$.

Ainſi il eſt évident que la ſomme des quarrés des lignes RP, QP, SP, TP, &c. menées comme ci-devant, ſera toujours une quantité donnée; à cauſe que la ſomme de leurs rectangles $2AQ \times BQ$, $3QR \times CR$, $4RS \times DS$, &c. ou de leurs égaux $AB \times QB$, $QC \times RC$, $RD \times SD$, &c. eſt donnée par la poſition des points A, B, C, D, &c.

Soit donc conſtruit un rectangle égal à l'excès de la ſomme des quarrés ſur celle des rectangles dont on vient de parler; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre la hauteur & la partie de la baſe exprimée par le nombre de points donnés, laquelle étant priſe pour rayon, & le dernier des points Q, R, S, T, &c. pris pour centre, on décrira une circonférence qui coupera MN au point demandé.

Si au lieu d'une ligne droite, on propoſoit la circonférence d'un cercle, ou quelqu'autre courbe, la conſtruction ſeroit encore la même.

Il eſt à propos d'obſerver que ſi $a \times \overline{AP}^2 + b \times \overline{BP}^2 + c \times \overline{CP}^2 + d \times \overline{DP}^2$, &c. ($a$, b, c, &c. repréſentant des nombres ou des lignes) eſt ſuppoſé donné, le point P ſera toujours ſur la circonférence d'un

cercle déterminé de même par le lemme précédent.

Car prenant dans ce cas, $\begin{cases} AQ : BQ :: b : a \\ QR : RC :: c : a+b \\ RS : DS :: d : a+b+c \\ ST : ET :: e : a+b+c+d ; \end{cases}$

& alors procédant comme ci-dessus, on trouvera que $a \times \overline{AP}^2 + b \times \overline{BP}^2 + c \times \overline{CP}^2 +$ &c. $= \overline{a+b} \times AQ \times BQ + \overline{a+b+c} \times QR \times RC + \overline{a+b+c+d} \times RS \times SD + \overline{a+b+c+d+e} \times ST \times TE + \overline{a+b+c+d+e} \times \overline{TP}^2$; ainsi il est évident que TP est une quantité donnée.

F I N.

C 16676

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un manuſcrit intitulé : *Élémens d'Analyſe, &c.* par M. Sympſon, & j'en crois l'impreſſion utile. A Paris, le 24 Octobre 1770.

LA CHAPELLE.

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre. A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT, notre amé le ſieur JOMBERT, fils, Imprimeur-Libraire, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public, les *Élémens d'Analyſe pratique & de Géométrie, traduits de l'Anglois par Thomas Sympſon, & le Manuel de l'Arpenteur.* S'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer leſdits Ouvrages autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes ; faiſons déſenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance : comme auſſi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non

ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du préſent Privilége; qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis dans le même état où les approbations y auront été données, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier Garde des Sceaux de France, le ſieur DE MAUPEOU; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit ſieur DE MAUPEOU; le tout à peine de nullité des Préſentes: Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes Ayans-cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des Préſentes qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenu pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers, Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Fontainebleau, le vingt-cinquiéme jour du mois d'Octobre, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-neuf, & de notre Regne le cinquante-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XVIII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 714, fol. 34, conformément au Réglement de 1723. A Paris, ce 2 Novembre 1769.

BRIASSON, *Syndic.*

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande.

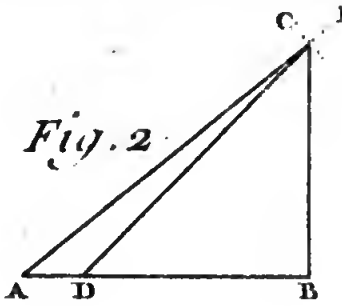


Fig. 2

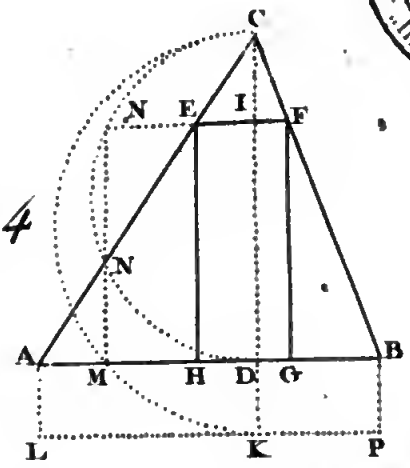


Fig. 4

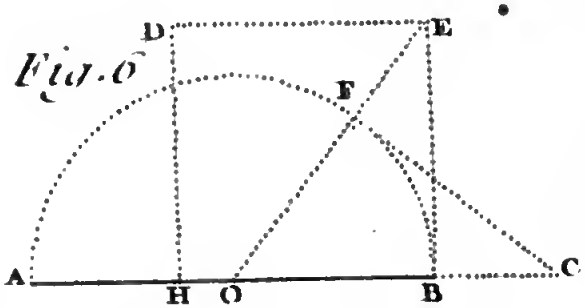


Fig. 6

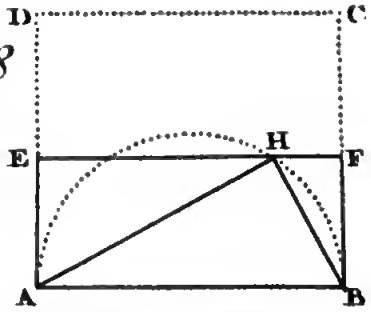
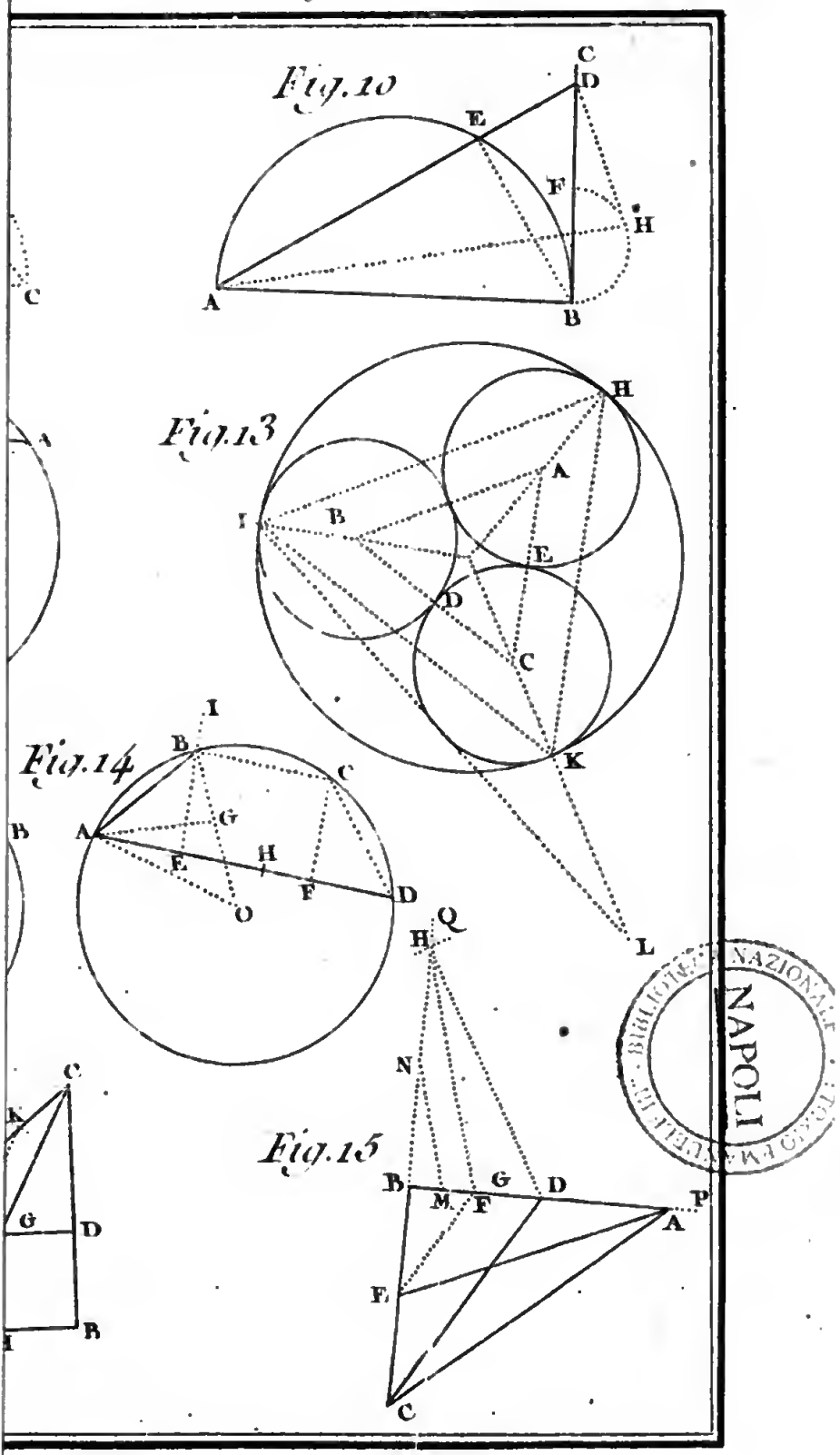


Fig. 8



BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

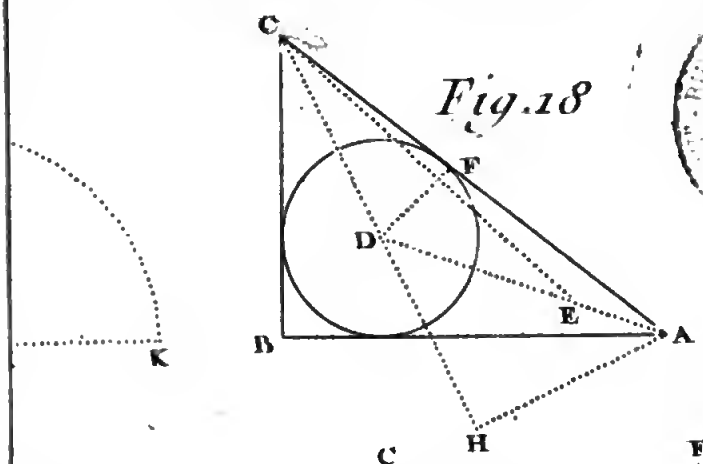


Fig. 18

Fig. 19

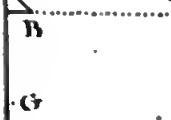


Fig. 20

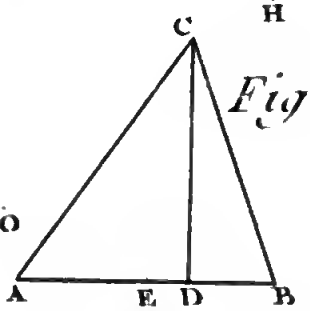


Fig. 21

Fig. 22

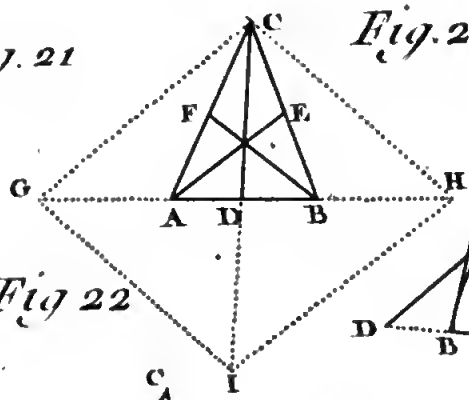


Fig. 26

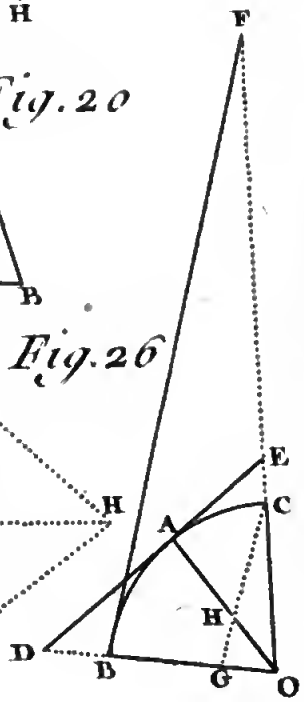


Fig. 24

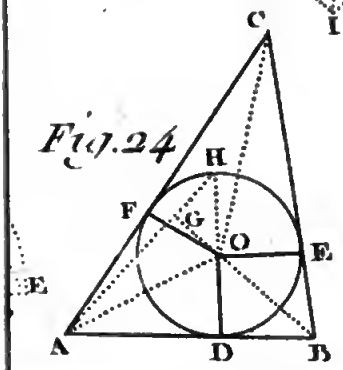


Fig. 25

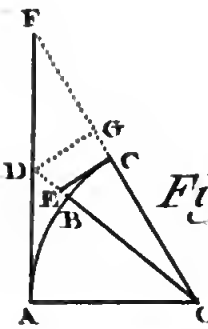
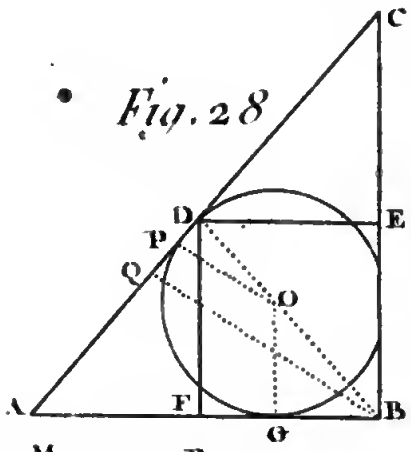


Fig. 28



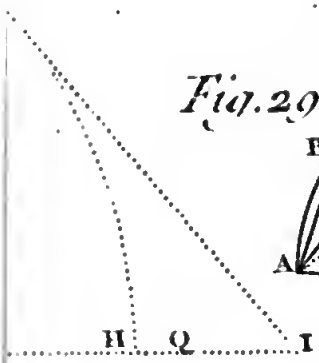
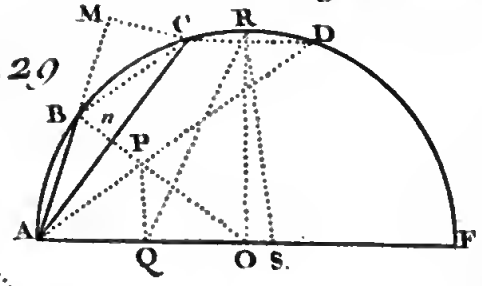


Fig. 29



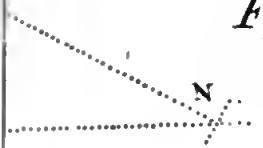
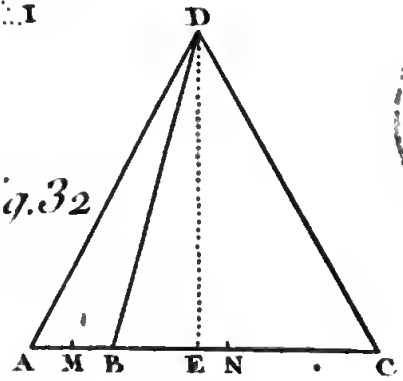


Fig. 32



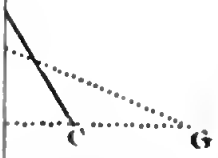
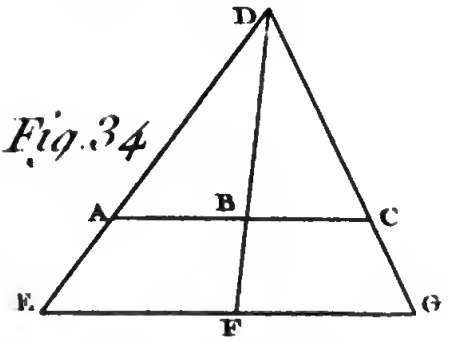


Fig. 34



BIBLIOTECA NAPOLI

36

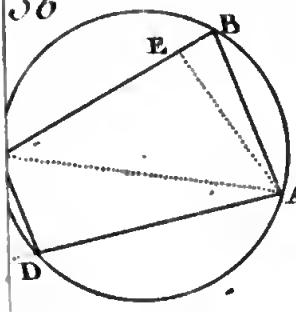
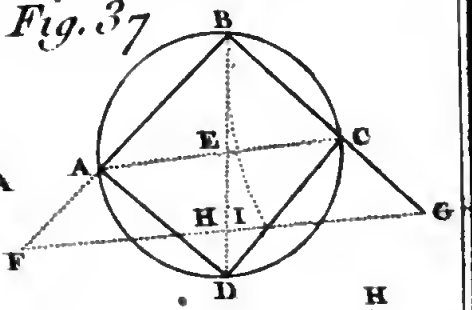
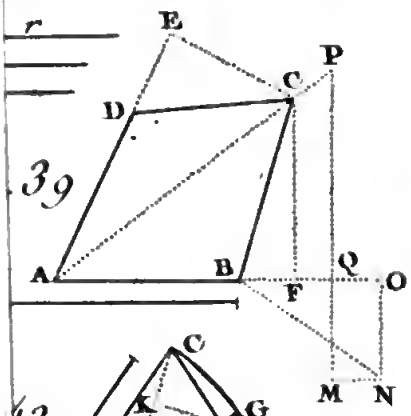


Fig. 37

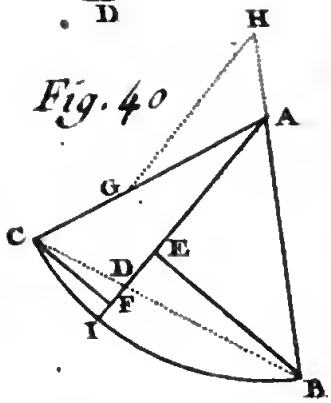


r



39

Fig. 40



42

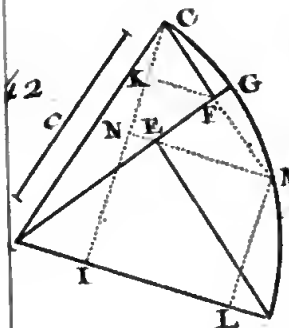
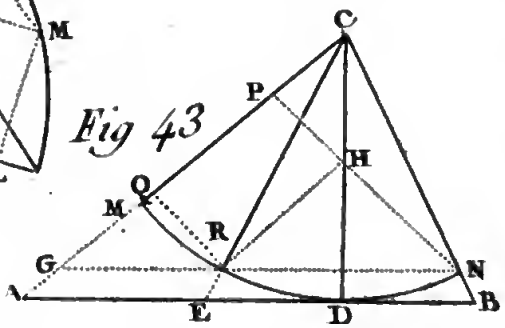


Fig 43



C

c

Fig. 44

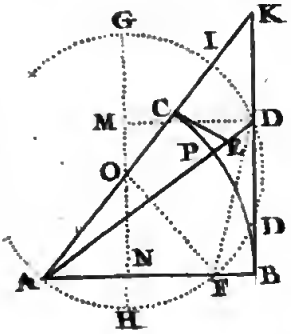
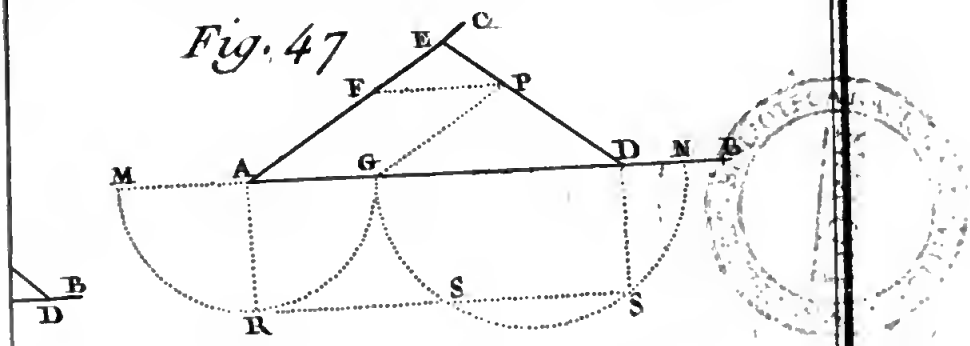


Fig. 47



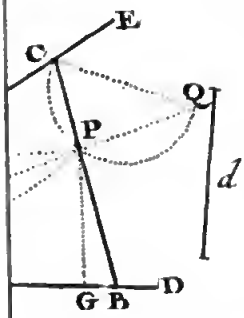


Fig. 49

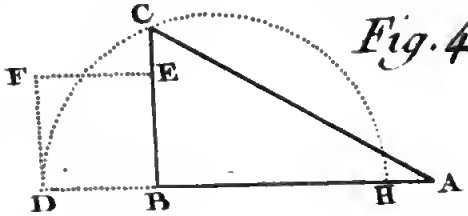
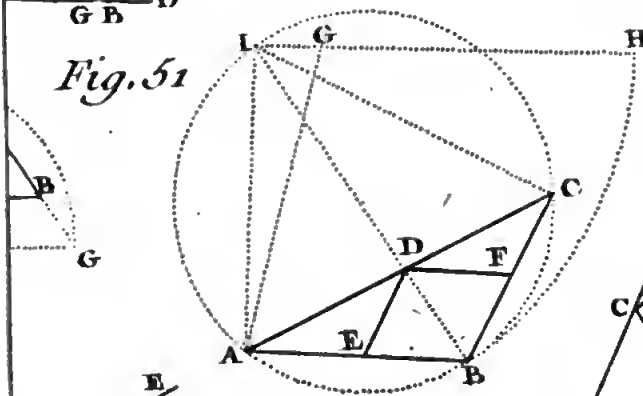


Fig. 51



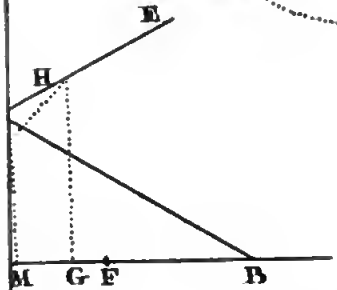
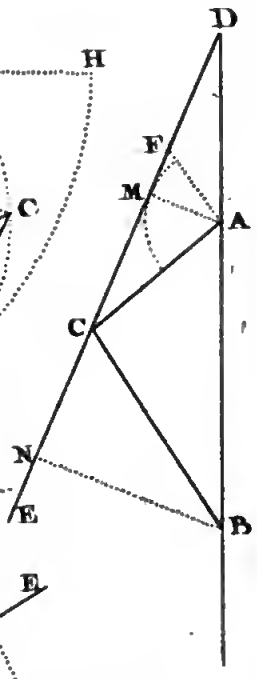


Fig. 52



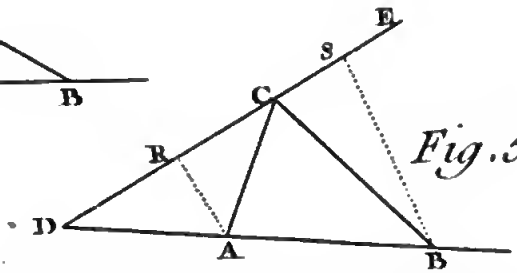


Fig. 53

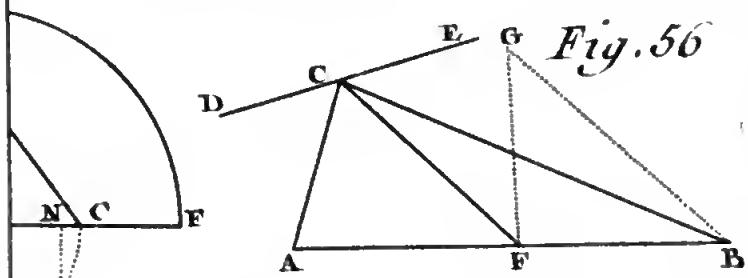


Fig. 56

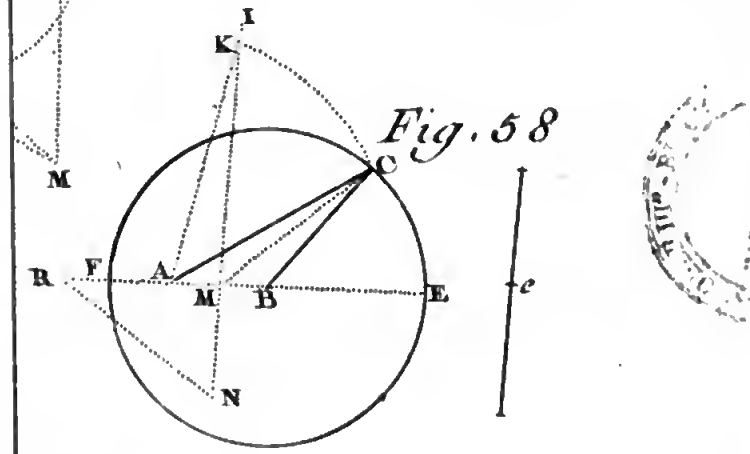


Fig. 58

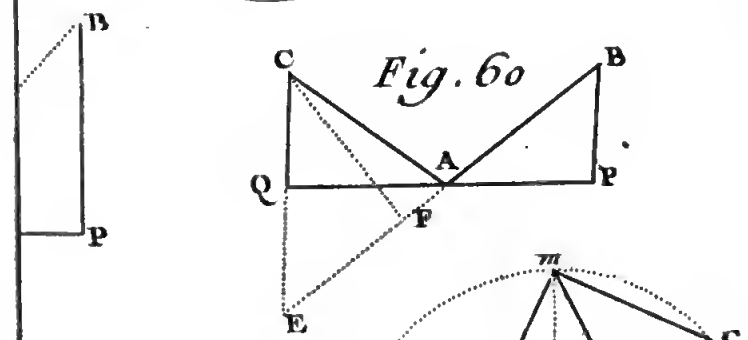


Fig. 60

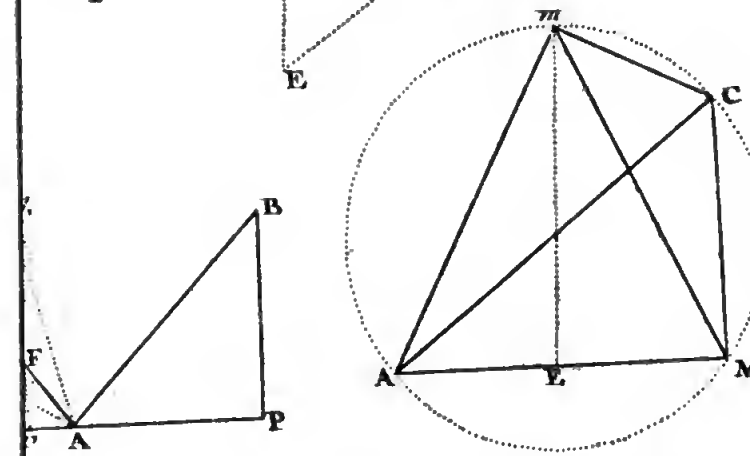


Fig. 62

Fig. 64

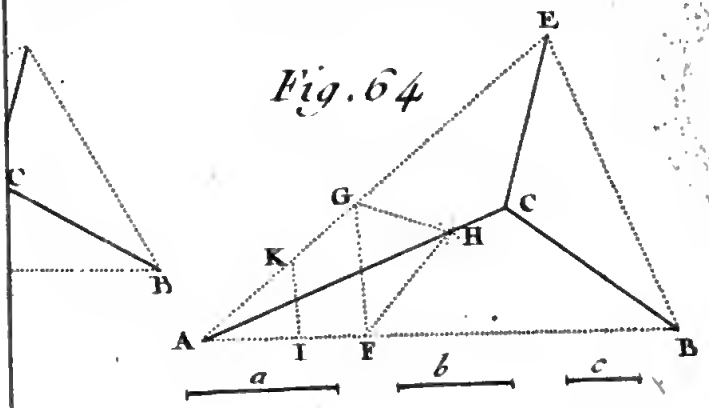


Fig. 65

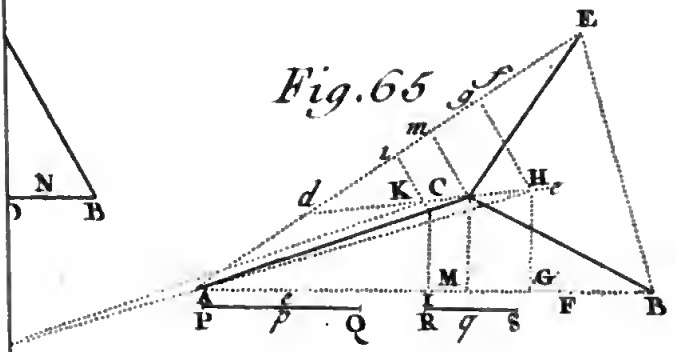
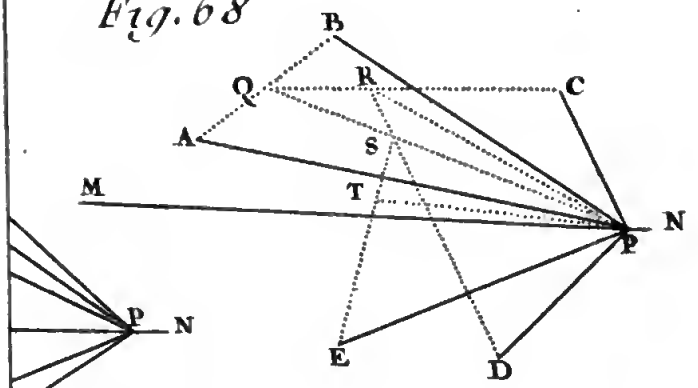


Fig. 68



CATALOGUE

DES Livres du fonds de CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, *fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf, à Paris.* 1771.

Ouvrages de M. OZANAM, *de l'Acad. des Sciences.*

COURS de Mathématique, qui comprend les parties de cette ſcience les plus utiles à un homme de guerre. En cinq vol. *in*-8°. avec plus de 200 pl. 40 liv.

L'Arithmétique, où toutes les parties de cette ſcience ſont démontrées d'une maniere courte & facile, *in*-8°. *broché*; 2 liv. 10 ſ.

* La Trigonométrie rectiligne & ſphérique, avec les tables des ſinus, tangentes & ſécantes, & des Logarithmes. Par Adrien Wlacq, *in*-8°. nouvelle édition augmentée 1765, avec 6 planches; 6 liv.

La Méchanique, où il eſt traité des machines ſimples & compoſées, de l'hydroſtatique & des machines hydrauliques, &c. *in*-8°. avec 28 planches, 6 liv.

La Perſpective théorique & pratique, où l'on enſeigne la méthode de mettre toutes ſortes d'objets en perſpective, & d'en repréſenter les ombres cauſées par le ſoleil ou par quelqu'autre lumiere, *in*-8°. avec 36 planc. 6 liv.

La Géographie & Coſmographie, où l'on traite de la ſphere, de la connoiſſance des corps céleſtes, des différens ſyſtêmes du monde, du globe, &c. *in*-8°. avec 14 planches, 6 liv.

La Gnomonique, où l'on donne la maniere de faire des cadrans ſolaires ſur toutes ſortes de ſurfaces, &c. *in*-8°. avec 30 planches, 6 liv.

* Les Récréations Mathématiques & Phyſiques, contenant pluſieurs problêmes curieux d'arithmétique, de géométrie, de méchanique, d'optique, de gnomonique & de phyſique. En quatre volumes, *in*-8°. avec 147 planches, nouvelle édition, 1770; 24 liv.

Les Elémens d'Euclide du P. Deſchallés; avec l'uſage de chaque propoſition pour toutes les parties des ma-

thématiques, par M. Audierne, *in*-12. avec 20 planches, 1753, 3 liv. 10 ſ.

Traité de l'Arpentage & du Toiſé, ou Méthode facile pour arpenter & meſurer toutes ſortes de ſuperficies; avec un nouveau tarif pour les bois de charpente, *in*-12, avec 12 planches, 1758, 3 liv. 10 ſ.

La Géométrie pratique, contenant la trigonométrie avec un Traité de l'arithmétique par géométrie, *in*-12, avec 12 planches, nouvelle édition, augmentée, 1762, 3 liv. 10 ſ.

* Uſage du Compas, de proportion & de l'inſtrument univerſel, avec un traité de la diviſion des champs, *in*-12, avec 12 planches, nouvelle édition, 1769, 2 l. 10 ſ.

Méthode de lever les Plans & les Cartes de terre & de mer, avec toutes ſortes d'inſtrumens & ſans inſtrumens, *in*-12, avec 16 planches, nouvelle édition, 1750, 2 l. 10 ſ.

Ouvrages traduits de l'Anglois de T. Simpſon, Profeſſeur de Mathématique à l'École Royale de Wolwich.

* Elémens de Géométrie, avec un Eſſai ſur les *maximis* & les *minimis*; un traité des ſolides réguliers, de la meſure des ſurfaces, & des ſolides; la conſtruction de divers problêmes géométriques, nouvelle édition augmentée de la trigonométrie rectiligne & ſphérique, & de 4 planches, *in*-8°. 1771, 6 liv.

* La Trigonométrie rectiligne & ſphérique, avec la nature & l'application des logarithmes, la conſtruction des tables des ſinus, tangentes, & les proportions des triangles, pour ſervir de ſupplément aux précédentes éditions, de ſa Géometrie, *in*-8°. avec 4 planhes, 1771, *broché*, 2 liv. 8 ſ.

* Elémens d'Analyſe pratique, ou recueil de problèmes numériques, réſolus par algebre; & de problêmes geométriques, réſolus par algebre & par géométrie. On y a joint une introduction à l'analyſe, & un petit traité d'arithmétique, *in*-8°. 1771, avec 9 planches, 6 liv.

Ouvrages du R. P. Lamy, de l'Oratoire.

Elémens de Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général, qui comprend l'arithmétique, l'algebre, & l'analiſe, huitieme édition, *in*-12, 1765, 3 liv.

Elémens de Géométrie ou de la meſure de l'Etendue, qui comprend les Elémens d'Euclide, les plus belles propoſitions d'Archimede touchant le cercle, la ſphere, le cylindre & le cône, ſeptieme édition, 1758, *in*-12, avec figures, 3 liv.

* Entretiens ſur les Sciences, dans leſquelles on apprend la maniere d'étudier les ſciences & de s'en ſervir pour ſe rendre l'eſprit juſte, & ſe former un cœur droit, *in*-12, nouvelle édition, 1768, 3 liv.

Ouvrages de M. Garſault, ci-devant Capitaine en ſurvivance des Haras du Roi.

* Nouveau Parfait Maréchal, ou la Connoiſſance générale du cheval, avec un dictionnaire des termes les plus uſités dans le manege, *in* 4°. nouvelle édition, 1770, avec figures, 10 liv.

* Le Guide du Cavalier, par le même Auteur, *in*-12, 1770, avec figures. 2 liv. 10 ſ.

Ouvrages de M. de la Guériniere, Ecuyer du Roi.

Ecole de Cavalerie, contenant la connoiſſance, l'inſtruction & la conſervation du cheval, *in-fol.* grand papier, avec fig. 40 liv.

* Le même, 2 vol. *in*-8°. avec fig. 1769, 12 liv.

* Le même 2 vol. *in*-12, petit for. avec figures, 1768. 5 liv.

ART MILITAIRE.

Ouvrages de M. Joly de Maiſeroy, Lieutenant Colonel d'Infanterie.

* Cours de Tactique, théorique, pratique & hiſtorique qui applique les exemples aux préceptes, développe les maximes des plus habiles Généraux, & rapporte les faits les plus intéreſſans & les plus utiles, avec les deſcriptions de pluſieurs batailles anciennes, 2 vol. *in*-8. enrichi de vingt-trois planches, 1766, 12 liv.

* *Suite.* Traité de Tactique, auquel on a joint les ſtratagemes permis à la guerre, & des maximes ſur l'Art Militaire, 2 vol. *in*-8. ornés de 15 planc. 1767, 10 l. 10 ſ.

* Traité des armes défenſives, *in*-8. 1767, *broché.* 1 l. 4 ſ.

* Inſtitutions Militaires de l'Empereur Léon le Philoſophe, traduites en françois, avec des notes & des obſervations, ſuivies d'une diſſertation ſur le feu grégeois, & d'un Traité ſur les machines de jet des anciens, 2 vol. *in*-8. avec 14 planches, 1771, 10 l. 10 ſ.

Ouvrages de M. Cugnot, ancien Ingén. de S. M. J. R. & A.

* Elémens de l'Art Militaire ancien & moderne, 2 vol. *in*-12, 1766, avec 12 planches 6 liv.
* *Suite.* La Fortification de Campagne théorique & pratique, ou traité de la ſcience, de la conſtruction, de la défenſe & de l'attaque des retranchemens, *in*-12, avec 12 planches. 1769, 3 liv.

De différens Auteurs.

* L'Ecole de l'Officier, contenant une méthode facile & abrégée de lever un plan ſans l'uſage de la Géométrie ordinaire, un petit traité de la fortification paſſagere, & des réflexions ſur l'art de la guerre, traduit de l'Allemand, par M. le Comte de Brühl, *in*-8°. enrichi de 9 planches, 1770, prix broché 3 liv. & relié en veau, 4 l. 4 ſ.

Le Parfait Capitaine, contenant l'abrégé des guerres des Commentaires de Céſar, la diſcipline militaire des Romains, & un petit Traité de la guerre, nouvelle édition augmentée, *in*-12, petit format, 1757, 2 l. 10 ſ.

Dictionnaire Militaire portatif, contenant tous les termes propres à la Guerre, la Tactique, le Génie, l'Artillerie, la Diſcipline des troupes tant ſur mer que ſur terre, quatrieme édition, *in*-8°. 3 vol. petit format, 1758, 15 liv.

* Inſtructions militaires ſur le ſervice de garniſon & de campagne dictées à l'Ecole Royale Militaire, par M. du Bouſquet, 2 vol. *in*-12, 1769, 5 liv.

Elémens de l'Art militaire, par feu M. d'Hericourt, nouvelle édition, augmentée, 6 vol. *in*-12, 1759, 15 liv.

* L'Ingénieur François, contenant la géométrie pratique ſur le papier & ſur le terrein, avec le toiſé des travaux & des bois, la fortification réguliere & irréguliere, la conſtruction effective, l'attaque, & la défenſe des places, avec la méthode de M. de Vauban, &

l'explication de ſon nouveau ſyſtême ; par M. Naudin ; Ingénieur Ordinaire du Roi, nouvelle édition, 1771, *in*-8. avec 24 planches ; 6 liv.

* Traité de Tactique des Turcs, ou méthode artificielle pour l'ordonnance des troupes, traduit du Turc, *in*-8. petit format 1769, broché 1 l. 10 ſ. & relié, 2 l. 5 ſ.

Commentaires de Meſſire Blaiſe de Montluc, Maréchal de France, nouvelle édition, augmentée d'une table des matieres, & de l'explication des mots hors d'uſage, 4 vol. *in*-12, 1760, 10 liv.

Mémoires du Duc de Rohan, ſur les choſes qui ſe ſont paſſées en France depuis la mort de Henri le Grand, juſqu'à la paix faite avec les Réformés, augmentés de divers diſcours politiques, & de ſes voyages, *in*-12, 4 parties reliées en 2 vol. 6 liv.

Mémoires Militaires ſur les Anciens, ou idée préciſe de tout ce que les anciens ont écrit relativement à l'Art Militaire, recueillis & mis en ordre par M. Maubert de Gouveſt, ornés de 16 planches, 1762, 2 vol. *in*-8. petit format reliés en un, *Amſterdam*. 3 l. 12 ſ.

* Mémoires Militaires & Voyages du R. P. de Singlande, ancien Aumônier des armées du Roi, contenant le détail, des principaux événemens militaires auxquels il a aſſiſté dans la guerre de 1741, & les années ſuivantes en Allemagne, en Flandres, en Italie & en Corſe, avec la deſcription exacte des villes & des lieux par où il a paſſé, 2 volumes *in*-12 1766, brochés 2 liv 8 ſ. & reliés en 1 vol. 3 liv.

* Journal du Siege de Bergopzoom en 1747, rédigé par un Lieutenant Ingénieur volontaire de l'armée des aſſiégeants, avec les plans de la ville & du fort, *in*-12, nouvelle édition, 1770, *Amſterdam*. 3 liv. 12 ſ.

* Véritable maniere de fortifier de M. de Vauban, où l'on voit de quelle méthode on ſe ſert aujourd'hui en France pour la fortification des places ; le tout mis en ordre par MM. l'Abbé Dufay & le Chevalier de Cambrai, nouvelle édition, enrichie de 31 planches, 2 vol. *in*-8. reliés en un. 1771 6 liv.

Code Militaire, ou Compilation des Ordonnances des Rois de France, concernant les Gens de Guerre, par Briquet, nouvelle édition, *in*-12, 8 vol. 1761, 30 l.

* Pratique de l'équitation, ou l'art de l'équitation, réduit en principes, par M. Dupaty de Clam, Mouſquetaire dans la premiere Compagnie, *in*-8. petit format, 1769, broché 1 l. 10 ſ. & relié, 2 liv. 5 ſ.

Ecole de Cavalerie, &c. *Voyez* pag. 3.

Parfait Maréchal, &c. *Voyez* ibid.

Guide du Cavalier, &c. *ibid.*

Mathématiques, Sciences & Arts.

Application de l'Algebre à la Géométrie, ou Méthode de démontrer par l'algebre les élémens de géométrie, d'en réſoudre & conſtruire tous les problêmes, par M. Guinée, *in*-4. avec 8 planches, 1733, 10 liv.

Œuvres de M. Ozanam. *Voyez* pag. 1.

* Manuel de l'Arpenteur, où l'on traite de l'arithmétique, des fractions décimales, des proportions, la planimetrie, la trigonométrie, la géodéſie, le jaugeage, &c. avec un ſommaire alphabétique des termes les plus uſités dans l'arpentage, & des tables de réduction, Ouvrage utile aux Seigneurs de fiefs, aux Commiſſaires à terriers. à tous Régiſſeurs & Gens d'affaires, Propriétaires & Fermiers, par M. *Ginet*, Arpenteur à la Maîtriſe des Eaux & Forêts de l'Iſle-de-France, *in*-8° avec 21 pl. 1770, 6 liv.

Leçons de Géométrie, dictées à l'école royale d'Architecture, par M. Mauduit, Profeſſeur de Mathématique en ladite école, *in*-8°. avec fig. 1771, *ſous preſſe.*

Œuvres de T. Simpſon. *Voyez* pag. 2.

Œuvres du R. P. Lamy. *Voyez* page 2 & 3.

* Les trois coups d'eſſai géométriques, contenant l'analyſe angulaire de la quarante-ſeptieme propoſition d'Euclide, une nouvelle propriété des polygones inſcrits au cercle, & une ſolution illuſoire de la quadrature du cercle, &c. par M. J. G. Marſſon, *in*-4. petit format, avec 4 planches, Strasbourg, 1770, broché 3 l. 12 ſ.

* Traité des Equations invariables, par M. J. R. Mourraille de l'Académie des Sciences & Belles Lettres de Marſeille, *in*-4°. avec 17 planches, 1770, 12 liv.

* Traité Elémentaire d'Hydrodynamique, par M. l'Abbé Boſſut, de l'Académie Royale des Sciences & Examinateur des Ingénieurs, &c. 2 vol, *in*-8. avec figures,

1771, broché 10 l. 10 s. relié en basanne 12 liv. & relié en veau 13 liv.

Traité élémentaire de Méchanique & Dynamique, appliqué principalement aux mouvemens des machines, par le même Auteur, *in*-8°. grand papier, avec 17 planches 1763, broché 5 liv. & relié 6 liv. 10 s.

* Leçons de navigation mises à la portée des pilotes, par M. Dulague, Professeur d'hydrographie, à Rouen, *in*-8. avec 8 planches, 5 liv.

Nouveaux Elémens d'optique, sur la théorie de l'aberration, la dissipation & la couleur des verres, leur pouvoir réfractif général & particulier, la densité des milieux, & les propriétés des lentilles qui entrent dans la construction des téleſcopes, microſcopes & lunettes acromatiques; traduits de l'Anglois de Benjamin Martin, & augmentés considérablement, *in*-8. avec plusieurs planches, 1771, *sous presse*.

Traité d'optique, où l'on donne la théorie de la lumiere dans le système Newtonien, avec de nouvelles solutions des principaux problêmes de dioptrique & de catoptrique, par M. le Marquis de Courtivron, *in*-4. petit format, avec 7 planches, 1752, broché 6 liv. & relié, 7 liv. 10 s.

* Maniere de bien juger des ouvrages de peinture, par feu M. l'Abbé Laugier, mise au jour & enrichie de notes critiques, par M***. *in*-12, 1771, 3 liv.

* Vies des Architectes anciens & modernes qui ont fleuri depuis le commencement de cet art jusqu'à nos jours, avec le sentiment impartial sur les ouvrages qu'ils ont exécutés, & dont ils ont donné les plans, traduits de l'Italien par M. Pingeron, 2 vol. *in*-12, 1771, 6 liv.

Vies des premiers Peintres du Roi, depuis M. le Brun jusqu'à présent, avec la description de leurs ouvrages, rédigées par M. Lepicier, 2 vol. *in*-8. petit format, 1751, reliés en un, 3 liv. 12 s.

* Observations physiques & morales sur l'instinct des animaux, leurs mœurs, leurs usages, leur industrie, traduit de l'Allemand, avec des notes, par M. R. D. L. *Amsterdam*, 1770, 2 vol. *in*-12, 5 liv. 10 s.

La Physique des Dames, ou explication des principaux phénomenes de la nature, mise à la portée du plus

grand nombre des lecteurs, 2 vol. *in*-12, 1771, *sous presse.*

Essai sur la construction & comparaison des thermometres, sur la communication de la chaleur, & sur les différens dégrés de la chaleur des corps, traduit de l'Anglois du Docteur Martine, auquel on a joint l'explication des premieres causes de l'action dans la matiere, & de la cause de la gravitation, *in*-12, 1751, 3 liv.

Traité du Barometre, ouvrage mathématique, physique & critique, avec une dissertation sur la cause & l'origine des Vents, & leurs principales propriétés & circonstances, *in*-12, Nancy, 1717, avec fig. 3 liv.

* Les Comédies de Terence, traduction nouvelle, avec le latin à côté, & des notes historiques, critiques & grammaticales, par M. l'Abbé le Monnier, très-belle édition, ornée de 7 sujets dessinés par M. Cochin, *in*-8°. 3 vol. papier double, 1771, brochés 24 liv. & reliés en veau propre, avec 3 filets, 30 liv.

* Les mêmes, 3 vol. *in*-8. petit format sans figures, reliés en veau, 12 liv.

* Les mêmes à l'usage des Colléges, 3 vol. *in*-8. petit format, sans figures, reliés en basanne, 9 l. 12 s.